UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELL'INSUBRIA
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Specialistica in Matematica
Sede di Como

Caratterizzazione di modelli mediante equazioni differenziali

Relatore: Prof. Stefano Pigola
Correlatore: Prof. Alberto G. Setti

Tesi di laurea di:
Michele Rimoldi
Matr. N. 612635

Anno Accademico 2007-2008

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELL'INSUBRIA
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Specialistica in Matematica
Sede di Como

Caratterizzazione di modelli mediante equazioni differenziali

Relatore: Prof. Stefano Pigola

Firma ....

Correlatore: Prof. Alberto G. Setti

Firma ....

Tesi di laurea di:
Michele Rimoldi
Matr. N. 612635

Anno Accademico 2007-2008

Introduzione

Questa tesi si colloca nello studio delle proprietà di rigidità metrica di varietà Riemanniane che supportano soluzioni di certi sistemi differenziali. Il nostro primo scopo è quello di trattare nel dettaglio il caso degli spazi di forme standard. Si ricordi che uno spazio di forme è una varietà Riemanniana completa, semplicemente connessa di curvatura sezionale costante. In accordo ad un noto teorema di classificazione di H. Hopf, gli spazi di forme sono, a meno di isometrie, lo spazio Euclideo, la sfera e lo spazio iperbolico. L'approccio che abbiamo seguito lascia intuire quale sia la direzione da seguire per la caratterizzazione di altre varietà modello (in un senso leggermente più esteso rispetto a quello di R. Greene e H.H. Wu, [GW]; vedi [Pet1]). Queste ultime sono varietà Riemanniane con metriche a simmetria rotazionale del tipo

$$\left([0,R)\times S^{m-1}, dr\otimes dr + g\left(r\right)^2 d\vartheta^2\right),$$

dove con $d\vartheta^2$ abbiamo denotato la metrica standard sulla sfera $(m-1)$-dimensionale e il fattore di deformazione $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ soddisfa opportune condizioni. Si noti che a partire dagli spazi di forme si ottengono gli esempi classici di modelli a curvatura costante:

$$\mathbb{R}^m = M_0^m = \left([0,+\infty)\times S^{m-1}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle = dr\otimes dr + r^2 d\vartheta^2\right);$$
$$\mathbb{H}_k^m = M_k^m = \left([0,+\infty)\times S^{m-1}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle = dr\otimes dr + (-k)^{-1}\sinh^2\left(\sqrt{-k}r\right)d\vartheta^2\right);$$
$$S_k^m\setminus\{p\} = M_k^m = \left([0,r_k)\times S^{m-1}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle = dr\otimes dr + k^{-1}\sin^2\left(\sqrt{k}r\right)d\vartheta^2\right).$$

Il punto di partenza per la nostra indagine è rappresentato dal seguente teorema che racchiude in un solo enunciato risultati classici dovuti rispettivamente a M. Obata, [Ob], M. Kanai, [Ka] e Y. Tashiro, [Ta].

Teorema 1. *Sia $(M,\langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ varietà Riemanniana completa e connessa di dimensione m. Allora:*

(a) Condizione necessaria e sufficiente affinché M sia isometrica alla sfera di curvatura costante $k>0$ è che M supporti una soluzione liscia non banale $u:M\to\mathbb{R}$ del sistema differenziale

$$Hess\left(u\right)\left(x\right) = -ku\left(x\right)\langle\cdot\,,\cdot\rangle.$$

(b) Condizione necessaria e sufficiente affinché M sia isometrica allo spazio iperbolico di curvatura costante $k<0$ è che M supporti una soluzione liscia non banale $u:M\to\mathbb{R}$ del sistema differenziale

$$Hess\left(u\right)\left(x\right) = -ku\left(x\right)\langle\cdot\,,\cdot\rangle$$

con esattamente un punto critico.

(c) *Condizione necessaria e sufficiente affinché M sia isometrica allo spazio Euclideo m-dimensionale è che M supporti una soluzione liscia non banale $u : M \to \mathbb{R}$ dell'equazione differenziale*

$$Hess\,(u)\,(x) = h\,\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle\,,$$

con h costante non nulla.

Osserviamo, con Tashiro, [Ta], che le equazioni di cui sopra possono essere riassunte nella forma

$$Hess\,(u) = (ku + h)\,\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle\,, \tag{1}$$

con k, h costanti non entrambe nulle.

La rappresentazione degli spazi di forme come prodotti deformati di un intervallo reale e della sfera $(m-1)$-dimensionale ci permette di esprimere l'Hessiana della funzione distanza da un punto fissato in termini del solo fattore di deformazione. Questa è solo una delle formule fondamentali che si possono ricavare per prodotti deformati, il cui studio affonda le radici in un lavoro di R. L. Bishop e B. O'Neill, [BiO'N]. Utilizzando questa formula, è immediato verificare che gli spazi di forme ammettono soluzioni radiali non banali dell'equazione (1) del tipo $u\,(r\,(x)) = A\int_0^{r(x)} sn_k\,(t)\,dt + B$, dove A, B sono costanti e $sn_k\,(t)$ rappresenta rispettivamente la funzione $\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}r\right), \sqrt{-k}\sinh\left(\sqrt{-k}r\right)$ o r, a seconda che k sia positivo, negativo oppure nullo. I nostri sforzi si sono concentrati quindi nel dimostrare l' implicazione opposta, onde garantire l'isometria della varietà completa in questione con il modello a curvatura costante k.

Un passo fondamentale consiste nel dimostrare che condizione sufficiente perché una varietà completa contenga una bolla $B\,(o, R)$ che sia isometrica ad un modello di curvatura sezionale costante è che esista una soluzione liscia u non banale, definita su $B\,(o, R)$, del sistema differenziale

$$\begin{cases} (i) & Hess\,(u)\,(x) = (-ku\,(x) + h)\,\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle \\ (ii) & |\nabla u|\,(o) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Grazie a considerazioni sul legame tra cut-locus e differenziabilità della funzione distanza, scoperto da R. L. Bishop e F.-E. Wolter, [Bi], [Wo], riusciamo a garantire l'assenza di punti di cut-locus all'interno di $B\,(o, R)$. In questo modo è possibile introdurre nella bolla coordinate geodetiche polari. In termini di queste ultime la metrica indotta dalla varietà su $B\,(o, R)$ risulta avere la stessa espressione della metrica del modello. Si verifica facilmente che soluzioni di (1) con $k \geq 0$ possiedono necessariamente almeno un punto critico. In questi casi quindi la richiesta (ii) in (2) non ha ruolo. Nel caso $k < 0$, invece, questa diventa essenziale. D'altra parte quando $k > 0$ è richiesto un ulteriore sforzo per includere il punto rimosso da S^m.

Alla luce di quanto esposto, desiderando estendere la caratterizzazione locale degli spazi di forme al caso di modelli, la direzione naturale che siamo portati a prendere è quella di considerare varietà che supportano soluzioni di equazioni differenziali più generali della forma

$$Hess\,(u)\,(x) = H\,(r\,(x))\,u\,(x)\,\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle\,,$$

ove $r\,(x)$ è la distanza da un punto privilegiato. Utilizzando le tecniche dimostrative sviluppate, siamo giunti infatti a dimostrare il seguente

Teorema 2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una varietà Riemanniana m-dimensionale completa $(M, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ contenga una bolla $B\,(o, R)$ centrata in $o \in M$ e che sia isometrica al modello*

$$M^m_{-G} = \left([0, R) \times S^{m-1}, dr \otimes dr + g\,(r)^2\, d\vartheta^2\right)$$

di curvatura sezionale radiale $-G\,(r)$ è che esista una soluzione liscia $u : B\,(o, R) \to \mathbb{R}$ del problema

$$(3) \qquad \begin{cases} Hess\,(u)\,(x) = H\,(r\,(x))\,u\,(x)\,\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle \\ u\,(o) = 1 \\ |\nabla u|\,(o) = 0, \end{cases}$$

ove $r\,(x) = d\,(x, o)$ e

$$H\,(t) = \frac{Ag'\,(t)}{A \int_0^r g\,(s)\,ds + 1},$$

per qualche numero reale $A \neq 0$ tale che

$$\sup \left\{ T > 0 \ :\ A \int_0^t g\,(s)\,ds + 1 > 0 \ su\ \ [0, T] \right\} \geq R.$$

Inoltre, se ciò accade, allora $u\,(x)$ è la funzione radiale

$$u\,(x) = A \int_0^{r(x)} g\,(s)\,ds + 1.$$

Veniamo ora all'organizzazione della tesi. Essa si articola essenzialmente in tre parti. La prima parte ha carattere propedeutico. Ricorderemo i concetti di geodetiche, mappa esponenziale e coordinate normali, richiamando inoltre le proprietà di minimizzazione locale delle geodetiche. Grazie al Lemma di Gauss introdurremo le coordinate geodetiche polari laddove esse hanno senso dando un'espressione della metrica in termini di queste. Ci dedicheremo poi ad una presentazione dettagliata del concetto di cut-locus, strumento essenziale nella nostra trattazione, dimostrandone le proprietà principali. Daremo rilievo in particolare ad una classificazione dei punti di cut-locus dovuta a W. Klingenberg e alla dimostrazione di un teorema di densità di R. Bishop; si veda [Bi], [Wo]. Da quest'ultimo, in particolare, discende che la funzione distanza da un'origine fissata o è differenziabile in una bolla $B(o, R)$ se e soltanto se tale bolla non contiene punti di cut-locus.
La seconda parte è dedicata alla caratterizzazione degli spazi di forme. Cominceremo richiamando il concetto di varietà modello e mostreremo come gli spazi di forme ammettano una tale descrizione. Ci concentreremo quindi sulla dimostrazione del Teorema 1.
Nel terzo capitolo estenderemo parte dei risultati al caso di generici modelli dando una dimostrazione completa del Teorema 2. Accenneremo infine a possibili sviluppi di questo lavoro. Tra di essi citiamo, in accordo a precedenti lavori di Y. Kerbrat, la possibile estensione del Teorema 2 all'ambito pseudo-Riemanniano.

Indice

Capitolo 1

Preliminari geometrici

1.1 Varietà Riemanniane, connessione di Levi-Civita e curvatura

Nel presente capitolo, e in tutti quelli che seguiranno, $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ denoterà sempre una varietà Riemanniana m-dimensionale in accordo alla seguente

Definizione 1. *Una varietà Riemanniana è una coppia $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ dove M denota una varietà differenziale paracompatta, di dimensione* $\dim M = m$, *e $\langle\cdot,\cdot\rangle = \{\langle\cdot,\cdot\rangle_p : p \in M\}$ è una famiglia di forme bilineari, simmetriche, definite positive $\langle\cdot,\cdot\rangle_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ su ciascuno spazio tangente T_pM. Tale famiglia dipende in modo C^∞ dal punto base p nel senso che, per ogni coppia di campi vettoriali lisci X, Y su M, la funzione reale $p \longmapsto \langle X_p, Y_p\rangle_p$ è di classe C^∞. La notazione standard $|X| = \langle X, X\rangle^{1/2}$ verrà ampiamente utilizzata.*

Fissata una carta locale (U, φ) di M con funzioni coordinate $x^1, ..., x^m$, la metrica Riemanniana $\langle\cdot,\cdot\rangle$ può essere scritta localmente nella forma

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

dove i coefficienti

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$$

sono funzioni lisce sull'aperto coordinato U. Ovviamente, in questa scrittura, la famiglia $\{\partial/\partial x^j : j = 1, ..., m\}$ denota il riferimento costituito dai campi vettoriali lisci su U indotti dalle funzioni coordinate, e $\{dx^j : j = 1, ..., m\}$ è il rispettivo riferimento duale.

La metrica Riemanniana $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su M determina univocamente la connessione di Levi-Civita.

Definizione 2. *Si dice connessione di Levi-Civita di* $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *l'unica connessione lineare* D *su* M *che sia compatibile con la metrica e che abbia torsione nulla. In altri termini, presi i campi vettoriali* X, Y, Z *su* M *si ha che, rispettivamente,*

$$D_X \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle$$

e

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y],$$

dove $[\cdot, \cdot]$ *denota il commutatore di campi vettoriali.*

Nelle coordinate locali $x^1, ..., x^m$ di una carta (U, φ) di M, si usa porre

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

dove gli m^3 coefficienti Γ_{ij}^k, detti simboli di Christoffel, sono funzioni liscie su U che soddisfano la legge di simmetria

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Quest'ultima non è altro che la rilettura, in termini locali, della proprietà che D ha torsione nulla. Di conseguenza, fissate le coordinate locali $x^1, ..., x^m$, e presi i campi vettoriali $X = X^i \partial / \partial x^i$ e $Y = Y^i \partial / \partial x^i$, la connessione di Levi-Civita si esprime nella forma

$$D_X Y = \left\{ X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right\} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

La connessione di Levi-Civita dà luogo, in modo naturale, ad una derivazione covariante di campi vettoriali lisci $t \mapsto V(t) \in T_{\sigma(t)} M$ lungo una curva C^∞ assegnata $\sigma : (a, b) \to M$. Denotiamo questa derivazione con il simbolo $(D_{\dot{\sigma}} V)(t)$, dove $\dot{\sigma}$ rappresenta il campo vettoriale lungo σ dato dal vettore velocità della curva. Così, se $V(t) = X|_{\sigma(t)}$ è il campo lungo σ ottenuto per restrizione alla curva del campo vettoriale X su M, si ha che

$$(D_{\dot{\sigma}} V)(t) = \left(D_{\dot{\sigma}(t)} X \right) (\sigma(t)).$$

Inoltre, in una carta locale (U, φ) di coordinate $x^1, ..., x^m$, posto $\sigma^j = x^j \circ \sigma$ e $V = V^j(t) \, \partial / \partial x^j|_{\sigma(t)}$, la derivata covariante assume l'espressione

$$(D_{\dot{\sigma}} V)(t) = \left\{ \frac{dV^j}{dt}(t) + \Gamma_{ki}^j (\sigma(t)) \frac{d\sigma^k}{dt}(t) \frac{d\sigma^i}{dt}(t) \right\} \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_{\sigma(t)}.$$

Ricordiamo infine che la compatibilità della connessione di Levi-Civita con la metrica si trasferisce alla derivata covariante lungo curve così che, presi i campi vettoriali V, W lungo σ,

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle D_{\dot{\sigma}}V, W\rangle + \langle V, D_{\dot{\sigma}}W\rangle .$$

Se da un lato, in virtù della torsione nulla, le derivate covarianti prime godono della proprietà di commutazione

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i},$$

nelle coordinate locali $x^1, ..., x^m$, d'altro lato, in generale, derivando una seconda volta, la proprietà di commutazione viene distrutta. La misura della non-commutatività delle derivate covarianti seconde è realizzata attraverso il tensore di Riemann.

Definizione 3. *Il tensore di Riemann è la funzione $C^{\infty}(M)$-multilineare che, ai campi vettoriali X, Y, Z su M, assegna il campo vettoriale*

$$R(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z.$$

Il tensore di Riemann è univocamente individuato da una funzione reale $K(\Pi)$ definita sui 2-piani tangenti $\Pi = \operatorname{span}\{X, Y\}$ dalla relazione

$$K(\Pi) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X\rangle}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2}.$$

Definizione 4. *Fissato il 2-piano tangente Π, la quantità reale $K(\Pi)$ prende il nome di curvatura sezionale di $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sul 2-piano Π.*

In accordo, la varietà Riemanniana $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ viene detta a curvatura costante $k \in \mathbb{R}$ se $K(\Pi) = k$ per ogni scelta del 2-piano Π. Più avanti, nel contesto dei modelli, compiendo una opportuna scelta del 2-piano Π, introdurremo il concetto di curvatura sezionale radiale.

1.2 Geodetiche e distanza

Le strutture di prodotto interno definito positivo sugli spazi tangenti ad una varietà Riemanniana danno naturalmente origine al concetto di lunghezza di un vettore tangente. Da questo si può ottenere l'idea di lunghezza di una curva come integrale della lunghezza del suo campo velocità. Sia $(M, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ varietà Riemanniana e sia $\gamma : [a, b] \to M$ un segmento di curva regolare e $\mathcal{C}^\infty$ a tratti in una varietà Riemanniana. Allora, indicato con $\dot{\gamma}$ il campo di velocità di γ la lunghezza $l(\gamma)$ è definita da

$$l(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt.$$

Essa risulta essere ben definita e invariante per riparametrizzazioni della curva.

1.2.1 Geodetiche

Definizione 5. *Diciamo che una curva $\sigma : (a, b) \to M$ è una geodetica se la sua accelerazione è nulla, i.e., detta D la connessione di Levi-Civita su M, $D_{\dot{\sigma}}\dot{\sigma} = 0$ su (a, b).*

In altri termini una curva σ è una geodetica se e solo se il campo vettoriale lungo σ dato dal vettore tangente è parallelo. Dalla compatibilità della connessione con la metrica Riemanniana g di M abbiamo che

$$\frac{d}{dt}\langle \dot{\sigma}, \dot{\sigma} \rangle = 2 \langle D_{\dot{\sigma}}\dot{\sigma}, \dot{\sigma} \rangle = 0$$

e quindi che la lunghezza del vettore tangente di una geodetica è costante. Questa proprietà può essere utilizzata per riparametrizzare σ in modo opportuno. Infatti, dato un segmento di curva $\sigma : [a, b] \to M$, introduciamo la funzione lunghezza d'arco

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\sigma}(x)|\, dx + C$$

con C costante. Se $\sigma(t)$ è una geodetica allora t è una funzione lineare della lunghezza d'arco poiché $|\dot{\sigma}|$ è costante. Nel seguito penseremo a geodetiche parametrizzate per lunghezza d'arco.

Supponiamo che $\sigma : [a, b] \to M$ sia contenuta nella carta coordinata (U, φ) di funzioni coordinate $x^1, \ldots, x^m$. Abbiamo che σ è una geodetica se e solo se soddisfa il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{d^2\sigma^i}{dt^2}(t) + \frac{d\sigma^k}{dt}(t)\frac{d\sigma^j}{dt}(t)\Gamma^i_{kj}(\sigma(t)) = 0.$$

Dal teorema di esistenza e unicità per le equazioni differenziali ordinarie ci aspettiamo un risultato di esistenza e unicità per il problema ai valori iniziali $\sigma(t_0) = p$ e $\dot{\sigma}(t_0) = v \in T_pM$ con $t_0 \in \mathbb{R}$. Tuttavia poiché il sistema è non lineare non abbiamo garantita l'esistenza della soluzione per ogni t. In particolare vale il seguente

Teorema 3. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana . Allora $\forall p \in M$ e $\forall v \in T_pM$ esiste un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ che contiene t_0 e una geodetica $\sigma : I \to M$ che soddisfi le condizioni iniziali $\sigma(t_0) = p$ e $\dot{\sigma}(t_0) = v$. Inoltre ogni due geodetiche di questo tipo coincidono sul dominio comune.*

Otteniamo quindi che per ogni $p \in M$ e $v \in T_pM$ esiste un'unica geodetica massimale $\sigma_v : I \to M$ con $\sigma_v(0) = p$ e $\dot{\sigma}_v(0) = v$ definita su qualche intervallo I, che sarà l'unione di tutti gli intervalli sui quali è definita una geodetica. Questo risultato ci permette di introdurre la mappa esponenziale.

1.2.2 Mappa esponenziale

Definizione 6. *Sia $p \in M$ definiamo $\Omega_p \subseteq T_pM$ come l'insieme dei vettori $v \in T_pM$ tali che la geodetica massimale γ_v è definita almeno sull'intervallo $[0, 1]$. La mappa esponenziale in p, $exp_p : \Omega_p \to M$, è definita da*

$$\exp_p(v) = \gamma_v(1).$$

Per il Teorema 3 la mappa exp_p è ben definita in un opportuno intorno di $0 \in T_pM$. Sia ora $t \in [0, 1]$, se exp_p è definita in $v \in T_pM$ allora lo è anche in tv. Possiamo quindi considerare la curva σ tale che $t \longmapsto exp_p(tv)$. Osserviamo che per ogni $v \in T_pM$ e $c, t \in \mathbb{R}$ vale che

$$\gamma_{cv}(t) = \gamma_v(ct)$$

quando entrambi i lati sono definiti. In particolare quindi

$$exp_p(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t).$$

Questo mostra tra l'altro che ogni Ω_p è stellato rispetto a p. Consideriamo ora il fibrato tangente TM. Fissato il punto $0 \in T_pM$ per il Teorema 3 esiste un intorno $V \subset TM$ di 0 dove è definita l'applicazione $exp : (q, v) \longmapsto exp_q(v)$. Essa è inoltre ivi di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Proposizione 1. *Per ogni $p \in M$ esiste un $\epsilon > 0$ tale che la mappa exp_p manda $B_\epsilon(0) \subset T_pM$ diffeomorficamente su un aperto $U_p \subset M$.*

1.2.3 Coordinate normali

La Proposizione 1 è utile per definire opportune carte coordinate.

Definizione 7. *Fissata una base ortonormale $\{e_1, \ldots, e_m\}$ in $\left(T_pM, \langle\cdot,\cdot\rangle_p\right)$, sia $\psi : T_pM \to \mathbb{R}^m$ definito da*

$$\psi : x = x^i e_i \longmapsto \left(x^1, \ldots, x^m\right).$$

Allora $\left(U_p, \psi \circ exp_p^{-1}\right)$ *definisce una carta coordinata nella struttura differenziale di* M*. Una tale carta prende il nome di carta normale e* U_p *è detto intorno normale di* p*. Se* $\epsilon > 0$ *è tale che* exp_p *è un diffeomorfismo sulla bolla* $B_\epsilon(0) \subset T_pM$ *allora l'insieme* $\exp_p\left(B_\epsilon^m(0)\right)$ *è chiamato bolla geodetica in* M*. Inoltre se anche la bolla chiusa* $\overline{B_\epsilon^m}(0)$ *è contenuta in un insieme aperto sul quale* exp_p *è un diffeomorfismo allora* $exp_p\left(\overline{B_\epsilon^m}(0)\right)$ *è chiamata bolla geodetica chiusa, e* $exp_p\left(\partial\overline{B_\epsilon^m}(0)\right)$ *è chiamata sfera geodetica.*

Osservazione 1. *D'ora in avanti, per economia di scrittura, sopprimeremo l'isomorfismo* ψ *dalla notazione lasciando sottointeso che è stato fissato un riferimento cartesiano su* T_pM*.*

L'utilità delle carte normali risiede nelle seguenti proprietà.

Proposizione 2. *Data la carta normale* $\left(U_p, exp_p^{-1}\right)$ *indichiamo al solito con* $x^1, \ldots, x^m$ *le sue funzioni coordinate.*

1. *Le componenti della metrica in* p *sono* δ_{ij}*.*

2. *Sia* $\gamma : [0, \delta] \to W \subset U_p \subset M$ *la geodetica uscente da* p *con velocità* $v = v^i e_i$*. Risulta allora* $\gamma^i(t) = x^i \circ \gamma(t) = v^i t$ *su* $[0, \delta]$ *per* $i = 1, \ldots, m$*.*

3. $\Gamma^i_{jk} = 0$ *per ogni* $i, j, k = 1, \ldots m$*.*

E' possibile raffinare la Proposizione 1 provando per ogni $p \in M$ l'esistenza di un intorno W di p che sia un intorno normale di ogni $q \in W$.

Proposizione 3. *Per ogni* $p \in M$ *esistono un intorno* $W \ni p$ *e* $\delta > 0$ *tali che per ogni* $q \in W$ *la mappa* exp_q *manda* $B_\delta^m(0) \subset T_qM$ *diffeomorficamente su un aperto* $U_q \supset W$*.*

Tale intorno W prende il nome di intorno totalmente normale di p

1.2.4 Distanza Riemanniana e lemma di Gauss

Ora, supponiamo che $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sia una varietà Riemanniana connessa. Per ogni coppia di punti p, $q \in M$ definiamo la distanza Riemanniana tra p e q come

$$d(p, q) = inf\left\{l(\gamma) : \gamma \in \Omega_{p,q}\right\},$$

ove con $\Omega_{p,q}$ abbiamo denotato l'insieme delle curve regolari e $\mathcal{C}^\infty$ a tratti da p a q. Si ha che la topologia metrica indotta da d coincide con quella originaria della varietà M.

Nello spazio metrico (M, d) sono definite bolle (aperte) e sfere metriche centrate in un generico punto p e di raggio $R > 0$. Esse verranno denotate rispettivamente come

$$\begin{aligned} B(p, R) &= \{x \in M : d(x, p) < R\}, \\ \partial B(p, R) &= \{x \in M : d(x, p) = R\}. \end{aligned}$$

Dato $p \in M$ e una carta normale $\left(U_p, \psi \circ exp_p^{-1}\right)$ con coordinate $x^1, \ldots, x^m$ possiamo scrivere la funzione distanza dal punto p, $r(x) = d(p, x)$, nella forma

$$r(x) = \left|exp_p^{-1}(x)\right| = \left(\sum_i \left(x^i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Quindi r è una funzione $\mathcal{C}^\infty$ su $U_p \setminus \{p\}$. Inoltre r è globalmente Lipschitziana poiché, per la disuguaglianza triangolare, presi $q, t \in M$,

$$|r(q) - r(t)| = |d(p, q) - d(p, t)| \leq d(q, t).$$

Definiamo il campo vettoriale radiale ∂_r come

$$\partial_r = \frac{x^i}{r} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Notiamo che, per ogni $q \in U_p \setminus \{p\}$, $\partial_r(q)$ è il vettore velocità della geodetica parametrizzata per lunghezza d'arco che congiunge p a q. In particolare, abbiamo che $|\partial_r| = 1$.
Vale il seguente importante lemma.

Lemma 1. *(Gauss) Sia U una bolla geodetica centrata in $p \in M$. Allora il campo gradiente di r soddisfa $\nabla r = \partial_r$ su $U \setminus p$, ove $\partial_r = Dexp_p(\partial_r)$.*

In particolare, il campo vettoriale unitario radiale ∂_r è ortogonale alle sfere geodetiche in U e $|\nabla r| = 1$ su $U \setminus \{p\}$.

1.2.5 Proprietà minimizzanti delle geodetiche

Una curva $\gamma : [a, b] \to M$ è detta essere minimizzante se

$$l(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b)).$$

Vale il seguente

Teorema 4. *Supponiamo che M sia una varietà Riemanniana. Siano $p \in M$ ed $\epsilon > 0$ tali che exp_p sia definito su $\{v \in T_pM : |v| < \epsilon\}$ e exp_p sia un diffeomorfismo di questo insieme sulla sua immagine in M. Allora*

1. *per ogni $v \in T_pM$ con $|v| < \epsilon$, la geodetica $\gamma_v : [0,1] \to M$ definita come $\gamma_v(t) = exp_p(tv)$ è l'unica curva minimizzante da p a $exp_p v$.*

2. *Inoltre, sia $\sigma : [0,1] \to M$, un segmento di curva minimizzante regolare e $\mathcal{C}^\infty$ a tratti parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco da p a $\exp_p(v)$ allora σ è una riparametrizzazione di γ_v.*

Questo teorema ci permette in particolare di garantire che se σ è una curva minimizzante, regolare, $\mathcal{C}^\infty$ a tratti e parametrizzata per lunghezza d'arco allora σ è una geodetica. Il prossimo corollario è conseguenza del Teorema 4.

Corollario 1. *Sia $p \in M$ e $\epsilon > 0$ tale che $exp_p : \{v \in T_xM : |v| < \epsilon\} \to M$ è definito ed è un diffeomorfismo sulla sua immagine. Allora per ogni $\lambda \leq \epsilon$ tale che la bolla metrica centrata in p di raggio λ è contenuta in $exp_p(B^m_\epsilon(0))$ vale che*

$$exp_p\left(B^m_\lambda(0)\right) = B(p, \lambda).$$

Inoltre

$$exp_p\left(\overline{B^m_\lambda}(0)\right) = \overline{B}(p, \lambda)$$

e analogamente

$$exp_p\left(\partial B^m_\lambda(0)\right) = \partial B(p, \lambda) = \{q \in M : d(p,q) = \lambda\}.$$

In altre parole all'interno di qualsiasi bolla geodetica centrata in $p \in M$ la lunghezza della geodetica che congiunge p a x è pari alla distanza Riemanniana $d(p,x)$.

1.2.6 Coordinate polari geodetiche

Il Corollario 1 suggerisce di introdurre un nuovo sistema di coordinate sulla varietà Riemanniana $(M, \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ dette coordinate geodetiche polari. Seguiamo [Pet1], [Pet2].
Fissato un punto $p \in M$, prendiamo un frame ortonormale locale $\{E_\alpha\}_{\alpha=2}^m$ sulla sfera unitaria in T_pM. Ovviamente, i campi vettoriali E_α saranno globalmente definiti solo se la sfera unitaria è parallelizzabile, tuttavia essi esistono sempre localmente. Estendiamo poi questi campi vettoriali in modo radiale ad un intorno U_p di p sul quale exp_p è un diffeomorfismo. Quindi, poniamo $E_1 = \nabla r$. Denotato con $\{\vartheta^1 = dr, \vartheta^\alpha : \alpha = 2, \ldots, m\}$ il rispettivo riferimento duale, si ha che la metrica Euclidea può essere scritta come

$$\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^m} = dr \otimes dr + r^2\left(\sum_{\alpha=2}^m \vartheta^\alpha \otimes \vartheta^\alpha\right), \tag{1.1}$$

ove con

$$\sum_{\alpha=2}^{m} \vartheta^\alpha \otimes \vartheta^\alpha = d\vartheta^2$$

abbiamo indicato la metrica sulla sfera standard $(m-1)$-dimensionale.
Più in generale prendendo il pull-back tramite exp_p della metrica Riemanniana di M, in virtù del Lemma 1, abbiamo che quest'ultima si esprime in coordinate polari (r, ϑ) come

$$\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle = dr \otimes dr + \sum_{\alpha,\beta=2}^{m} \sigma_{\alpha\beta}\,(r, \vartheta)\, \vartheta^\alpha \otimes \vartheta^\beta, \tag{1.2}$$

ove

$$\sigma_{\alpha\beta} = \langle E_\alpha, E_\beta \rangle$$

Inoltre vale che

$$\sigma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r^2 \end{pmatrix} + o\left(r^2\right). \tag{1.3}$$

Confrontando con la (1.1), questo esprime il fatto che al primo ordine, ogni metrica Riemanniana è Euclidea. Da questo vogliamo dedurre che, a meno di infinitesimi di ordine superiore, ogni varietà Riemanniana gode, in piccolo, della legge dei coseni Euclidea. A tal fine, può essere utile osservare che, in U_p,

$$Hess\,(r) = \langle \cdot\,,\, \cdot \rangle + o\left(r^2\right), \tag{1.4}$$

per $r \to 0$. Questo fatto può essere facilmente dedotto dalle (1.2), (1.3) e dalla seguente formula per la derivata di Lie della metrica in direzione radiale

$$\mathcal{L}_{\partial_r} \langle \cdot\,,\, \cdot \rangle = 2Hess\,(r)\,. \tag{1.5}$$

La (1.5) a sua volta segue prendendo $f = r$ nella prossima caratterizzazione dell'Hessiana di una funzione che ci sarà utile anche in seguito, e ricordando che, per il Lemma 1, $\nabla r = \partial_r$.

Proposizione 4. *Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Allora si ha che*

$$2Hess\,(f)\,(Y, Z) = \mathcal{L}_{\nabla f} \langle \cdot\,,\, \cdot \rangle\,(Y, Z)\,, \tag{1.6}$$

ove con $\mathcal{L}_{\nabla f} \langle \cdot\,,\, \cdot \rangle$ abbiamo indicato la derivata di Lie della metrica nella direzione del gradiente di f e Y, Z sono campi vettoriali su M.

Dimostrazione. Sia X un altro campo vettoriale su M, osserviamo che vale la relazione

$$(\mathcal{L}_X \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)(Y,Z) = \langle D_Y X, Z\rangle + \langle Y, D_Z X\rangle\,. \tag{1.7}$$

Infatti usando le proprietà di torsione nulla e di compatibilità con la metrica della connessione di Levi Civita si ha che

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)(Y,Z) =& D_X \langle Y,Z\rangle - \langle \mathcal{L}_X Y, Z\rangle - \langle Y, \mathcal{L}_X Z\rangle \\ =& D_X \langle Y,Z\rangle - \langle [X,Y]\,, Z\rangle - \langle Y, [X,Z]\rangle \\ =& D_X \langle Y,Z\rangle - \langle D_X Y - D_Y X, Z\rangle - \langle Y, D_X Z - D_Z X\rangle \\ =& D_X \langle Y,Z\rangle - \langle D_X Y, Z\rangle + \langle D_Y X, Z\rangle \\ & - \langle Y, D_X Z\rangle + \langle Y, D_Z X\rangle \\ =& \langle D_Y X, Z\rangle + \langle Y, D_Z X\rangle\,.\end{aligned}$$

Prendendo $X = \nabla f$ in (1.7) otteniamo

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{\nabla f} \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)(Y,Z) =& \langle D_Y \nabla f, Z\rangle + \langle Y, D_Z \nabla f\rangle \\ =& 2Hess\,(f)\,(Y,Z)\,.\end{aligned}$$

□

Passiamo ora a dimostrare il seguente

Teorema 5 (Legge dei coseni infinitesimale)**.** *Sia $(M, \langle \cdot\,,\,\cdot\rangle)$ varietà Riemanniana e $p \in M$. Presi due vettori unitari $v_1, v_2 \in T_pM$, consideriamo le geodetiche parametrizzate per lunghezza d'arco $\gamma_j = \gamma_{v_j}$, $j = 1,2$, tali che $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. Fissato poi $t < inj\,(p)$, consideriamo i punti $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$. Allora, detto $\vartheta = \angle(v_1, v_2)$, vale che*

$$(d(\gamma_1(t)\,,\gamma_2(t)))^2 = 2t^2(1-\cos\vartheta) + o\left(t^4\right)$$

Dimostrazione. Poniamo $r_q(x) = d(x,q)$, $q = \gamma_1(t)$ e $z = \gamma_2(t)$. Osserviamo che, poiché $t < inj\,(p)$, γ_1 e γ_2 sono geodetiche minimizzanti rispettivamente da p a q e da p a z.

Consideriamo ora $r_q^2 \circ \gamma_j(s)$ e calcoliamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(\frac{r_q^2}{2}\circ\gamma_j\right) &= \left\langle \nabla\left(\frac{r_q^2}{2}\right)(\gamma_j(s)), \dot{\gamma}_j(s)\right\rangle, \\
\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{r_q^2}{2}\circ\gamma_j\right) &= \frac{d}{ds}\left\langle \nabla\left(\frac{r_q^2}{2}\right)(\gamma_j(s)), \dot{\gamma}_j(s)\right\rangle \\
&= \left\langle D_{\dot{\gamma}_j}\nabla\left(\frac{r_q^2}{2}\right)(\gamma_j(s)), \dot{\gamma}_j(s)\right\rangle \\
&\quad + \left\langle \nabla\left(\frac{r_q^2}{2}\right)(\gamma_j(s)), D_{\dot{\gamma}_j}\dot{\gamma}_j(s)\right\rangle \\
&= \left\langle D_{\dot{\gamma}_j}\nabla\left(\frac{r_q^2}{2}\right)(\gamma_j(s)), \dot{\gamma}_j(s)\right\rangle \\
&= Hess\left(\frac{r_q^2}{2}\right)(\dot{\gamma}_j, \dot{\gamma}_j)_{|\gamma_j(s)}.
\end{aligned}$$

Dalla (1.4) otteniamo quindi che per $r_q^2 \circ \gamma_2(s) \to 0$

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{r_q^2}{2}\circ\gamma_2(s)\right) = 1 + o\left(\frac{r_q^2}{2}\circ\gamma_2(s)\right),$$

i.e., poiché per la disuguaglianza triangolare

$$r_q(\gamma_2(s)) \leq s + t \leq 2t,$$

si ha che, per $t \to 0$,

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{r_q^2}{2}\circ\gamma_2(s)\right) = 1 + o\left(t^2\right). \tag{1.8}$$

Integrando due volte (1.8) ricaviamo, per $t \to 0$,

$$\begin{aligned}
(d(q,\gamma_2(t)))^2 &= (d(\gamma_2(0),\gamma_1(t)))^2 + t^2 + 2t^2\langle -v_1, v_2\rangle + o\left(t^4\right) \\
&= (d(q,\gamma_2(0)))^2 + t^2 - 2t\cos\angle(v_1,v_2) + o\left(t^4\right) \\
&= (d(q,\gamma_2(0)))^2 + (d(\gamma_2(0),\gamma_2(t)))^2 \\
&\quad - 2d(q,\gamma_2(0))\, d(\gamma_2(0),\gamma_2(t))\cos\angle(v_1,v_2) + o\left(t^4\right) \\
&= t^2 + t^2 - 2t^2\cos\vartheta + o\left(t^4\right) \\
&= 2t^2(1-\cos\vartheta) + o\left(t^4\right).
\end{aligned}$$

$\square$

1.2.7 Completezza

Definizione 8. *Una varietà Riemanniana è detta essere geodeticamente completa in $p \in M$ se ogni geodetica massimale uscente da p è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$. Una varietà è geodeticamente completa se lo è in ciascun punto.*

Il prossimo teorema stabilisce l'equivalenza tra vari concetti di completezza e in particolare tra completezza metrica e completezza geodetica di una varietà Riemanniana. Si ricordi che una curva $\gamma : [0,l) \to M$ è detta divergente se per ogni K compatto esiste $T = T(K)$ tale che $\gamma(t) \in M \setminus K$, per ogni $t \geq T$. In altri termini $\gamma(t) \to \infty$ per $t \nearrow l$ dove ∞ è il punto di compattificazione di Alexandroff.

Teorema 6. *(Hopf-Rinow) Per una varietà Riemanniana connessa M le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *M è geodeticamente completa.*
2. *M è geodeticamente completa in p.*
3. *M soddisfa la proprietà di Heine Borel, i.e. ogni insieme chiuso e limitato è compatto.*
4. *M è metricamente completa rispetto alla distanza Riemanniana d.*
5. *Curve divergenti in M hanno lunghezza infinita.*

Da (3) segue inoltre che una varietà Riemanniana compatta è anche completa. Dalla dimostrazione del Teorema 6 si ottiene il prossimo

Corollario 2. *Se M connessa è completa, in uno qualsiasi dei sensi indicati, allora ogni coppia di punti può essere congiunta da un segmento di geodetica minimizzante.*

Come semplice conseguenza del Corollario 2 abbiamo che per una varietà Riemanniana completa valgono le relazioni

$$\begin{aligned}
&(i)\ exp_p\left(B_R^m\right) = B\left(p,R\right),\\
&(ii)\ exp_p\left(\overline{B_R^m}\right) = \overline{B}\left(p,R\right),\\
&(iii)\ exp_p\left(\partial B_R^m\left(0\right)\right) \supseteq \partial B\left(p,R\right),
\end{aligned}$$

per ogni $R > 0$. Notiamo che, in generale, l'inclusione (iii) è stretta. Caratterizzare le situazioni in cui vale l'uguaglianza necessita l'introduzione del concetto di cut-locus.

Corollario 3. *Se in M esiste un punto p per il quale exp_p è definita su tutto T_pM, i.e $\Omega_p \cap T_pM = T_pM$, allora M è completa, e quindi exp è definita su tutto TM.*

1.3 Cut-locus

1.3.1 Definizione e proprietà del cut-locus

Fino ad avviso contrario, la nostra presentazione si baserà sul libro di I. Chavel, [Ch].
Sia $(M, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ una varietà Riemanniana completa, sia $p \in M$ e $\gamma : [0, \infty) \to M$ una geodetica con $\gamma(0) = p$. Sappiamo che per $t > 0$ sufficientemente piccolo $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$, i.e., $\gamma|_{[0,\,t]}$ è una geodetica minimizzante. Lo stesso è vero per ogni $t_1 < t$. Infatti se esistesse $T \in [0, t]$ tale che $d(p, \gamma(T)) < T$, allora per la disuguaglianza triangolare otterremmo che

$$d(p, \gamma(t)) \leq d(p, \gamma(T)) + d(\gamma(T), \gamma(t)) < T + t - T = t,$$

e questo è assurdo. Per continuità, l'insieme dei numeri $t > 0$ tali che $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$ è della forma $(0, t_0]$ o $(0, \infty)$. Nel primo caso, $\gamma(t_0)$ è detto cut-point di p lungo γ, nel secondo caso diciamo che tale cut-point lungo γ non esiste.

Definizione 9. *Per ogni punto $p \in M$ definiamo il* cut-locus di p *denotato con $cut(p)$ come l'unione dei cut-point al variare delle geodetiche uscenti da p. Osserviamo che se M è compatta, il suo diametro è finito, quindi esiste un cut point per ogni punto $p \in M$ lungo ogni geodetica uscente da p.*

Dato $p \in M$, denotiamo con $\partial B_1^m = \partial B_1^m(0)$ l'insieme dei vettori tangenti ad M in p con norma unitaria. Sia quindi $\xi \in \partial B_1^m$. Definiamo la funzione distanza c dal cut-point di p lungo γ_ξ tramite

$$c(\xi) = sup\{t > 0 : t\xi \in \Omega_p, d(p, \gamma_\xi(t)) = t\}.$$

Detto $TM = \sqcup_p T_p M$ il fibrato tangente di M con proiezione $\pi(v_p) = p$, consideriamo il fibrato tangente unitario $SM = \{\xi \in TM : |\xi| = 1\}$ con la proiezione $\pi|_{SM}$. Possiamo allora riguardare la funzione $c(\xi)$ come definita su SM. Vale il seguente

Teorema 7. *La funzione $c : SM \to (0, \infty]$ dove c è la distanza lungo γ_ξ da $\pi(\xi)$ al cut-point di $\pi(\xi)$ lungo γ_ξ, è semicontinua dall'alto su SM. Se M è varietà Riemanniana completa, allora la funzione c è continua su SM.*

Dimostrazione. Supponiamo di avere $\xi \in SM$ e una successione $\{\xi_k\}$ in SM tale che $\xi_k \to \xi$ per $k \to \infty$. Poniamo

$$p = \pi(\xi), p_k = \pi(\xi_k), d_k = c(\xi_k).$$

Se la successione $\{d_k\}$ ha una sottosuccessione $\{\delta_j\} = \left\{d_{k_j}\right\}$ tale che $\delta_j \to +\infty$ per $j \to \infty$ allora, per ogni $T > 0$, si ha che $\delta_j > T$, pur di prendere j abbastanza grande. Quindi

$$\lim_{j\to\infty} \gamma_{\xi_{k_j}}(T) = \gamma_\xi(T)$$

e

$$d(p, \gamma_\xi(T)) = \lim_{j\to\infty} d\left(p_{kj}, \gamma_{\xi_{k_j}}(T)\right) = T.$$

Per cui $c(\xi) = +\infty$. Similmente se $\{d_k\}$ ha una sottosuccessione convergente $\{\delta_j\} = \left\{d_{k_j}\right\}$ tale che $\delta_j \to \delta$ per $j \to \infty$ allora si ha, per tutti gli $0 < \epsilon < \delta$,

$$d(p, \gamma_\xi(\delta - \epsilon)) = \lim_{j\to\infty} d\left(p_{k_j}, \gamma_{\xi_{k_j}}(\delta_j - \epsilon)\right) = \lim_{j\to\infty} \delta_j - \epsilon = \delta - \epsilon,$$

da cui segue che $c(\xi) \geq \delta$. Riassumendo abbiamo che

$$\limsup_{k\to\infty} c(\xi_k) \leq c(\xi).$$

Rimane quindi da mostrare che se M è completa vale anche che

$$\liminf_{k\to\infty} c(\xi_k) \geq c(\xi). \tag{1.9}$$

Basta trattare il caso in cui $\{c(\xi_k)\}$ converge a $\delta < +\infty$ per $k \to \infty$. Dobbiamo mostrare che γ_ξ non può minimizzare le distanze passato il punto $\gamma_\xi(\delta)$. Per il Teorema 8 che dimostreremo nella sezione 1.3.2 abbiamo che è verificato uno dei seguenti casi.

1. $\gamma_{\xi_k}(c(\xi_k))$ è un valore critico di exp_{p_k}.

2. Per ogni k, esiste $\eta_k \in SM$, $\eta_k \neq \xi_k$ tale che $\pi(\eta_k) = \pi(\xi_k) = p_k$ e $\gamma_{\eta_k}(c(\xi_k)) = \gamma_{\xi_k}(c(\xi_k))$.

Nel caso (1), $\gamma_{\xi_k}(c(\xi_k))$ è detto essere un *punto coniugato* a p_k lungo γ_{ξ_k}. Usando il fatto che l'insieme dei punti critici è chiuso, otteniamo che $\gamma_\xi(\delta)$ è coniugato a p lungo γ_ξ, e questo prova che $c(\xi) \leq \delta$. Infatti nel Teorema 8 vedremo che punti coniugati e punti con geodetiche minimizzanti multiple sono in effetti punti di cut-locus. Nel caso (2), pur di passare ad una sottosuccessione, possiamo supporre che esista $\eta \in SM$ tale che $\eta_k \to \eta$ per $k \to \infty$. Ma allora $\pi(\eta) = \pi(\xi) = p$ e $\gamma_\eta(\delta) = \gamma_\xi(\delta)$. Se $\eta \neq \xi$, allora sicuramente $c(\xi) \leq \delta$. Se invece $\eta = \xi$, allora l'applicazione $\pi \times \exp_p$ non è un diffeomorfismo su un intorno di $(\delta\xi, \delta\xi)$ in $TM \times TM$. Questo implica che $\gamma_\xi(\delta)$ è coniugato a p lungo γ_ξ e otteniamo ancora che $c(\xi) \leq \delta$. Questo conclude la dimostrazione di (1.9) e prova la seconda parte del teorema. $\square$

Sia ora $\xi \in \partial B_1^m$. Osserviamo che se $t < c(\xi)$, allora γ_ξ è l'unica geodetica minimizzante da p a $\gamma_\xi(t)$. Altrimenti, se esistesse un altro $\eta \in \partial B_1^m$, $\eta \neq \xi$, tale che $\gamma_\eta(t) = \gamma_\xi(t)$, allora per ogni $T \in (t, c(\xi))$ potremmo percorrere γ_η da p a $\gamma_\xi(t)$ e poi γ_ξ da $\gamma_\xi(t)$ a $\gamma_\xi(T)$. Otterremmo quindi una geodetica spezzata minimizzante da p a $\gamma_\xi(T)$ e questo non è possibile.
Poiché la distanza è simmetrica, quando M è completa abbiamo che per tutti i vettori $\xi \in SM$ per i quali $c(\xi) < +\infty$ vale che

$$c(-\dot{\gamma_\xi}(c(\xi))) = c(\xi).$$

In particolare per $p, q \in M$ abbiamo che

$$q \in cut(p) \text{ sse } p \in cut(p).$$

Proposizione 5. *$cut(p)$ è chiuso.*

Dimostrazione. Se $q \in M$ è un punto di accumulazione di $cut(p)$ allora esiste una successione $\{\gamma_j(t_j)\}$ con $t_j = c(\dot{\gamma_j})$ tale che $\lim_{j\to\infty} \gamma_j(t_j) = q$. Passando eventualmente ad una sottosuccessione, poiché ∂B_1^m è compatto possiamo supporre che $\dot{\gamma_j}(0) \to v \in \partial B_1^m$ per $j \to \infty$. Consideriamo ora la geodetica γ con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$. Allora, poiché per il Teorema 7 c è continua, vale che

$$q = \lim \gamma_j(t_j) = \lim \gamma_j(c(\dot{\gamma_j}(0))) = \lim exp_p(c(\dot{\gamma_j}(0))\dot{\gamma_j}(0)) \tag{1.10}$$

$$= exp_p(c(\dot{\gamma}(0))\dot{\gamma}(0)) = \gamma(c(\dot{\gamma}(0))). \tag{1.11}$$

Quindi $q \in cut(p)$ e questo mostra che $cut(p)$ è chiuso. □

Dalla Proposizione 1 sappiamo che esiste un intorno U di $0 \in T_pM$ tale che exp_p è un diffeomorfismo su U. In particolare, p ha sempre distanza positiva da $cut(p)$. Il più grande raggio ϵ per il quale $\exp_p : B_\epsilon^m(0) \to B(p,\epsilon)$ è un diffeomorfismo viene detto *raggio di iniettività* in p e lo denotiamo con $inj(p)$. Definiamo il *cut-locus tangente* di $p \in T_pM$ come

$$C(p) = \{c(\xi)\xi : c(\xi) < +\infty, \xi \in \partial B_1^m\},$$

così che $cut(p) = exp_p(C(p))$. Inoltre poniamo

$$D(p) = \{t\xi : 0 \le t < c(\xi), \xi \in \partial B_1^m\}, D_p = exp_p(D(p)).$$

In particolare se $v \in C(p)$ è il punto più vicino a 0 in questo insieme allora $|v| = inj(p)$.

Proseguiamo nella caratterizzazione del cut-locus con la prossima proposizione. Ricordiamo che, assegnata una varietà differenziale M di dimensione m, il sottoinsieme $A \subset M$ ha misura nulla se esiste un atlante numerabile $\{(U_j, \varphi_j)\}$ nella struttura differenziale di M tale che, per ogni j, $\varphi_j(U_j \cap A)$ ha misura di Lebesgue nulla nel senso dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^m$.

Proposizione 6. *$cut(p)$ ha misura nulla.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme

$$A = \{c(\xi)\,\xi \in \mathbb{R}^n : \xi \in \partial B_1^m, c(\xi) < +\infty\}.$$

Poiché la funzione $c : SM \to (0, +\infty]$ è continua e in particolare misurabile otteniamo che A ha misura di Lebesgue nulla. Infatti, integrando in coordinate polari e utilizzando il teorema di Fubini,

$$dx(A) = \int_A 1dx = \int_{\xi \in \partial B^m(p)} \left(\int_{A \cap \{t\xi : t \geq 0\}} t^{m-1} dt \right) d\xi = 0.$$

L'immagine di $C(p)$ tramite la mappa esponenziale, che è differenziabile, è il cut-locus di p. Quindi per il teorema di Sard $cut(p)$ ha misura nulla. $\square$

Dalle considerazioni fatte è immediato ottenere che $D(p)$ è il più grande insieme stellato rispetto all'origine di T_pM sul quale exp_p è un diffeomorfismo. Inoltre $D_p = M \setminus cut(p)$. Dimostriamo ora due risultati che ci saranno utili in seguito.

Proposizione 7. *Sia M una varietà Riemanniana completa. Se $cut(p)$ è non vuoto e compatto allora M è compatta.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che M non sia compatta. Poiché $cut(p)$ è compatto esiste R tale che $cut(p) \subset B(p, R)$. Si ha quindi che

$$D(p) \supseteq exp_p^{-1}(M \setminus B(p, R)).$$

Inoltre vale che

$$exp_p^{-1}(M \setminus B(p, R)) = T_pM \setminus B_R^m(0) \tag{1.12}$$

Infatti sappiamo che per ogni $\epsilon > 0$

$$exp_p^{-1}(\partial B(p, R + \epsilon)) \subseteq \partial B_{R+\epsilon}^m. \tag{1.13}$$

Ma, posto $r(x) = d(x, p)$, si ha che

$$\partial B(p, R + \epsilon) = r^{-1}(R + \epsilon).$$

Osserviamo che $r(x)$ è una funzione $\mathcal{C}^\infty$ su $M \setminus cut(p) \supseteq M \setminus B(p, R)$ con $|\nabla r| = 1$. Quindi $\partial B(p, R + \epsilon)$ è sottovarietà compatta di $\dim \partial B(p, R + \epsilon) = m - 1$. Otteniamo quindi che, per ogni $\epsilon > 0$, $exp_p^{-1} : \partial B(p, R + \epsilon) \to \partial B_{R+\epsilon}^m$ è un diffeomorfismo. Perciò nella (1.13) vale l'uguaglianza. Poiché $D(p)$ è stellato rispetto a $0 \in T_pM$ deve necessariamente essere $D(p) = T_pM$ i.e. $cut(p) = \emptyset$. Contraddizione. $\square$

Proposizione 8. *Sia M una varietà Riemanniana geodeticamente completa e sia $p \in M$. Se $B(p,r) \cap cut(p) = \emptyset$, i.e. $inj(p) \geq r$, allora $exp_p(\partial B_r^m) = \partial B(p,r)$.*

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che $\partial B(p,r) \subseteq exp_p(\partial B_r^m)$.
Viceversa, sia $w \in \partial B_r^m$. Se $w \notin C(p)$ cut-locus tangenziale in p si ha che $exp_p(w) \in \partial B(p,r)$ poiché γ_w è minimizzante da p a $exp_p(w)$ e $l(\gamma_w) = r$. Se invece $w \in C(p)$, abbiamo già osservato che $exp_p(w) \in \overline{B}(p,r)$. Ma $exp_p(w) \in cut(p)$ e, per ipotesi, $cut(p) \cap B(p,r) = \emptyset$. Dunque $exp_p(w) \in \partial B(p,r)$. □

1.3.2 Teorema di decomposizione di Klingenberg

In questa sezione diamo un' utile classificazione dei punti di cut-locus dovuta a Klingenberg. Adotteremo l'approccio di P. Petersen, [Pet1], che evita l'introduzione dei campi di Jacobi.
Consideriamo una varietà Riemanniana $(M, \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ completa. Preso un arbitrario punto $p \in M$ sappiamo che, per definizione, un punto q di M giace nel cut-locus di p se e solo se esiste una geodetica minimizzante da p a q per la quale qualsiasi estensione oltre a q smette di essere minimizzante. Adottando la terminologia di Bishop [Bi] diamo la seguente

Definizione 10. *Chiamiamo un punto $q \in cut(p)$ un* punto ordinario *se ci sono due o più geodetiche minimizzanti da p a q, mentre se c'è una sola geodetica minimizzante tra p e q chiamiamo $q \in cut(p)$* punto singolare.

Sia $r : M \to \mathbb{R}$ la funzione distanza da p. Abbiamo visto nella Sezione 1.2 che esiste un intorno di p dove r è $\mathcal{C}^\infty$ eccetto che in p. Inoltre r è globalmente Lipschitziana, quindi, in accordo al teorema di Rademacher, r è differenziabile fuori da un insieme di misura nulla. Vale la seguente

Proposizione 9. *Nei punti ordinari di $cut(p)$ la funzione distanza $r(x)$ non è differenziabile.*

Dimostrazione. Sia q punto di cut-locus ordinario con $d(p,q) = l$. Prendiamo due vettori $v_1 \neq v_2 \in T_pM$ e consideriamo $\gamma_{v_1} = \gamma_1$ e $\gamma_{v_2} = \gamma_2$ geodetiche minimizzanti parametrizzate per lunghezza d'arco da p a q, cosicché $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$=p, $\gamma_1(l) = \gamma_2(l) = q$ e $\dot{\gamma}_j(0) = v_j$.

La derivata sinistra in l di $d(p, \gamma_i(t))$, $i = 1, 2$, vale chiaramente 1. Infatti, per $0 < h < l$,

$$\frac{\Delta_{-h}(r \circ \gamma_j)}{-h} = \frac{(r \circ \gamma_j(l-h)) - (r \circ \gamma_j(l))}{-h} = \frac{l-h-l}{-h} = 1. \tag{1.14}$$

Siano ora $\xi_1, \xi_2 \in T_qM$ i vettori tangenti rispettivamente a γ_1, γ_2 in q. Si ha che

$$\omega = \angle (\xi_1, \xi_2) \in (0, \pi] .$$

E' possibile dare una limitazione superiore per $d(p, \gamma_2(t))$. Infatti, definita la funzione

$$u(t) = d(p, \gamma_1(l-h)) + d(\gamma_1(l-h), \gamma_2(t)),$$

per la disuguaglianza triangolare si ha

$$d(p, \gamma_2(t)) \leq u(t).$$

Inoltre, posto $h = t - l \geq 0$ e $\vartheta = \angle(-\xi_1, \xi_2)$, così che $\cos\vartheta = -\cos\omega$, per il Teorema 5 sappiamo che

$$d(\gamma_1(l-h), \gamma_2(l+h)) = \sqrt{2h^2 + 2h^2\cos\omega\,(1 + o(h^2))}; \quad h \to 0.$$

Otteniamo quindi la seguente stima dall'alto per la derivata destra di $d(p, \gamma_2(t))$ in l.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta_h(r \circ \gamma_2(t))}{h} =& \frac{d(p, \gamma_2(l+h)) - d(p, \gamma_2(l))}{h} \\
\leq& \frac{u(l+h) - d(p, \gamma_2(l))}{h} \\
=& \frac{d(p, \gamma_1(l-h)) + d(\gamma_1(l-h), \gamma_2(l+h))}{h} \\
&+ \frac{d(p, \gamma_2(l-h)) - d(\gamma_2(l-h), \gamma_2(l))}{h} \\
=& \frac{d(\gamma_1(l-h), \gamma_2(l+h)) - h}{h} \\
=& \frac{\sqrt{2h^2 + 2h^2\cos\omega}\,(1 + o(h^2)) - h}{h}.
\end{aligned}$$

Quindi, per $h \to 0$

$$\frac{\Delta_h(r \circ \gamma_2(t))}{h} \to \sqrt{2}\sqrt{1 + \cos\omega} - 1 < 1,$$

poiché $\cos\omega < 1$. Questo ci consegna insieme a (1.14) la non differenziabilità in q della funzione distanza $r(x)$. $\square$

Su $D(p)$ la mappa esponenziale exp_p è iniettiva e abbiamo che ogni $x \in exp_p(D(p))$ è unito a p da un unico segmento di geodetica minimizzante. Sia $D_p = exp_p(D(p))$ consideriamo su di esso il campo vettoriale

$\partial_r = Dexp_p(\partial_r)$. Sappiamo che $r(x) = d(x,p) = \left|exp_p^{-1}(x)\right|$ sarà liscia su D_p con $\nabla r = \partial_r$ se mostriamo che $exp_p : D(p) \to D_p$ è un diffeomorfismo. Abbiamo già osservato che exp_p è iniettiva su $D(p)$, quindi resta solo da mostrare il seguente

Lemma 2. *$exp_p : D(p) \to D_p$ è non singolare dapertutto, i.e., non ha punti critici.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme

$$\{v \in D(p) : Dexp_p \, \text{è singolare in} \, v\}.$$

Esso è chiuso poiché l'insieme dei punti critici è un chiuso e inoltre non contiene $0 \in T_pM$. Possiamo allora trovare $v \in T_pM$ tale che $exp_p : B^m_{|v|}(0) \cap D(p) \to B(p, |v|)$ è un diffeomorfismo e $Dexp_p$ è singolare in v. Utilizziamo le coordinate cartesiane su $B(p, |v|)$ ottenute scegliendo una base ortonormale su T_pM e poi passando a $B(p, |v|)$ tramite la mappa esponenziale e denotiamo con g la metrica su di esso. Sia $w \in T\left(B^m_{|v|}(0) \cap D(p)\right)$. Allora w può essere scritto come $w = w^i \partial_i$. $Dexp_p(w)$ ha la stessa rappresentazione di w in coordinate e

$$|Dexp_p(w)|^2 = g_{ij} w^i w^j. \tag{1.15}$$

In particolare supponendo che r sia liscia in una regione che approssima $exp_p(v)$ si ha che $Dexp_p$ è singolare in v se e solo se il determinante della Jacobiana va a zero quando ci avviciniamo a $exp_p(v)$.
Ora consideriamo $w = w^i \partial_i$ tale che w è ortogonale a v in T_pM e $Dexp_p(w) = 0$. Per il Lemma 1 abbiamo quindi che w è ortogonale a ∂_r in M. Passando alle coordinate polari r, $\theta = (\theta^2, \ldots, \theta^m) \in \partial B^m_1$ in un intorno di p e ignorando la coordinata sferica poiché essa è fissata otteniamo

$$\sum_{\alpha,\beta=2}^{m} g_{\alpha\beta}(r) \, w^\alpha w^\beta \to 0 \quad r \to |v|.$$

Quindi abbiamo anche che

$$g(w^\alpha \partial_\alpha, w^\alpha \partial_\alpha) = g_{\alpha\beta} w^\alpha w^\beta \to 0 \quad r \to |v|.$$

Ma allora

$$\log g(w^\alpha \partial_\alpha, w^\alpha \partial_\alpha) \to -\infty \quad r \to |v|.$$

Deve quindi esistere una sequenza di numeri $r_n \to |v|$ per $n \to \infty$ tale che

$$\partial_r \log g_{r_n}(w^\alpha \partial_\alpha, w^\alpha \partial_\alpha) \to -\infty \quad n \to \infty.$$

Vale la seguente identità

$$
(1.16) \qquad \partial_r \log g\left(w^\alpha \partial_\alpha, w^\alpha \partial_\alpha\right) = \frac{2g\left(w^\alpha D_{\partial_r}\partial_\alpha, w^\alpha \partial_\alpha\right)}{g\left(w^\alpha \partial_\alpha, w^\alpha \partial_\alpha\right)} = \frac{2g\left(w^\alpha D_{\partial_\alpha}\partial_r, w^\alpha \partial_\alpha\right)}{g\left(w^\alpha \partial_\alpha, w^\alpha \partial_\alpha\right)},
$$

ove nella seconda uguaglianza abbiamo utilizzato il fatto che $[\partial_\alpha, \partial_r] = 0$ e la proprietà di torsione nulla della connessione di Levi-Civita. Dalla (1.16) concludiamo che esiste una successione $r_n \to |v|$ tale che l'Hessiana soddisfi

$$
(1.17) \qquad \frac{g_{r_n}\left(D_{w^\alpha \partial_\alpha}\partial_r, w^\alpha \partial_\alpha\right)}{g_{r_n}\left(w^\alpha \partial_\alpha, w^\alpha \partial_\alpha\right)} \to -\infty \quad n \to \infty.
$$

Ora, per come abbiamo scelto v, possiamo trovare $\epsilon > 0$ tale che la curva $\gamma(t) = exp_p(tv)$ sia minimizzante sull' intervallo $[0, 1+\epsilon]$. Scegliamo ϵ abbastanza piccolo in modo che $\tilde{r}(x) = d(x, \gamma(1+\epsilon))$ sia liscia sulla bolla $B(\gamma(1+\epsilon), 2\epsilon) \ni \gamma(1)$. Consideriamo poi la funzione $h(x) = r(x) + \tilde{r}(x)$. Dalla disuguaglianza triangolare sappiamo che per ogni $x \in M$

$$
h(x) \geq 1+\epsilon = d(p, \gamma(1+\epsilon)).
$$

Inoltre $h(x) = 1+\epsilon$ quando $x = \gamma(t)$, $t \in [0, 1+\epsilon]$. Quindi h ha un minimo assoluto lungo $\gamma(t)$ e deve avere Hessiana definita non negativa in tutti i punti di $\gamma(t)$.
Tuttavia vale che

$$
\frac{g_{r_n}\left(D_{w^\alpha \partial_\alpha}\nabla h, w^\alpha \partial_\alpha\right)}{g_{r_n}\left(w^\alpha \partial_\alpha, w^\alpha \partial_\alpha\right)} = \frac{g_{r_n}\left(D_{w^\alpha \partial_\alpha}\nabla r, w^\alpha \partial_\alpha\right)}{g_{r_n}\left(w^\alpha \partial_\alpha, w^\alpha \partial_\alpha\right)} + \frac{g_{r_n}\left(D_{w^\alpha \partial_\alpha}\nabla \tilde{r}, w^\alpha \partial_\alpha\right)}{g_{r_n}\left(w^\alpha \partial_\alpha, w^\alpha \partial_\alpha\right)} \to -\infty \quad r_n \to |v|.
$$

Infatti $Hess_{|r_n}\tilde{r}$ è limitata in un intorno di $\gamma(1)$ e $Hess_{|r_n}r$ tende a $-\infty$ quando $r_n \to |v|$ per la (1.17). Otteniamo quindi una contraddizione. □

Diamo ora una descrizione più dettagliata del cut-locus $cut(p)$.

Teorema 8. *(Klingenberg) Sia $v \in T_pM$. Allora $v \in C(p) = \bar{D}(p) \setminus D(p)$ se e solo se si verifica uno dei seguenti casi.*

1. *$\exists w \in \bar{D}(p)$, $w \neq v$ tale che $exp_p(v) = exp_p(w)$.*

2. *v è punto critico per exp_p.*

Dimostrazione. Sia $\gamma(t) = exp_p(tv)$. Per $t > 1$ consideriamo i segmenti di curva minimizzanti $\sigma_t(s) : [0,1] \to M$ con $\sigma_t(0) = p$, $\sigma_t(1) = \gamma(t)$. Poiché abbiamo supposto che $\gamma : [0,t] \to M$ non sia minimizzante, abbiamo che $\dot{\sigma}_t(0)$ non è mai proporzionale a $\dot{\gamma}(0)$. Ora scegliamo $t_n \to 1$ tale che $\dot{\sigma}_{t_n}(0) \to w \in T_pM$. Abbiamo che

$$l(\sigma_{t_n}) = |\dot{\sigma}_{t_n}(0)| \to l(\gamma : [0,1] \to M) = |\dot{\gamma}(0)|.$$

Quindi o $w = \dot{\gamma}(0)$ oppure w non è proporzionale a $\dot{\gamma}(0)$. Nell'ultimo caso, otteniamo così il vettore w di cui al punto (1). Nel primo caso invece dobbiamo verificare che $Dexp_p$ è singolare in v. Se così non fosse, exp_p dovrebbe essere un imbedding vicino a v e in particolare iniettiva. Ora, $\dot{\sigma}_{t_n}(0) \to v = \dot{\gamma}(0)$ e $exp_p(\dot{\sigma}_{t_n}(0)) = exp_p(t_n\dot{\gamma}(0))$, quindi $\dot{\sigma}_{t_n}(0) = t_nv$ mostrando che γ deve essere segmento di una curva minimizzante su qualche $[0, t_n]$, $t_n > 1$. Questo contraddice la nostra scelta di γ.
Ora dimostriamo che se è verificata una tra le condizioni (1) e (2) allora $v \in C(p)$. Supponiamo che valga (1). Allora abbiamo già osservato nella Sezione 1.3.1 che $v \notin D(p)$. Quindi $v \in \bar{D}(p) \setminus D(p) = C(p)$. Se invece vale (2) allora, per il Lemma 2, otteniamo ancora che $v \notin D(p)$, poiché $exp_p : D(p) \to D_p$ non ha punti critici. Concludiamo dunque che $v \in C(p)$. □

In particolare vale che se q è il punto di $cut(p)$ più vicino a p e q non è coniugato a p lungo una geodetica minimizzante che congiunge p a q allora q è un punto intermedio di un ciclo geodetico che inizia e finisce in p. Infatti vale il prossimo

Teorema 9. *Sia $v \in C(p)$, $|v| = inj(p)$. Allora si verifica uno dei seguenti casi*

1. *Esiste precisamente un altro vettore w con $exp_p(w) = exp_p(v)$ ed è caratterizzato da*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=1} exp_p(tw) = -\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=1} exp_p(tv).$$

2. *$q = exp_pv$ è un valore critico per $exp_p : \Omega_p \to M$.*

Nel primo caso esistono esattamente due curve minimizzanti da p a $q = exp_p(v)$ e si uniscono in modo liscio in q formando un ciclo geodetico.

Dimostrazione. Dati p e $q = exp_pv$ come nell'enunciato, se q non è coniugato a p lungo una geodetica minimizzante che congiunge p a q i.e. non vale (2) allora, per il Teorema 8, esistono due distinti segmenti di geodetica γ_1, γ_2 minimizzanti da p a q. Nessuno dei due inoltre contiene punti coniugati a p. Sia L la lunghezza comune di γ_1 e γ_2 e $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. Consideriamo le due ipersuperfici date da

$$\{\gamma_\xi(L)\} \quad \text{e} \quad \{\gamma_\eta(L)\},$$

ove ξ varia in un intorno di $\dot{\gamma}_1(0)$ in ∂B_1^m e η varia in un intorno di $\dot{\gamma}_2(0)$ in ∂B_1^m. Se $\dot{\gamma}_1(L) \neq -\dot{\gamma}_2(L)$, allora le due ipersuperfici si intersecano trasversalmente in q. Questo implica che al variare di ξ e η per ϵ abbastanza piccolo

$$\{\gamma_\xi(L-\epsilon)\} \cap \{\gamma_\eta(L-\epsilon)\} \neq \emptyset,$$

contraddicendo l'assunzione che $|v| = inj(p)$. $\square$

Osserviamo che, fissato un punto p di una varietà Riemanniana completa, è possibile che un punto di cut-locus ordinario per p sia anche un valore singolare di exp_p.
Consideriamo ad esempio $M = S^m$ sfera standard e $p \in M$. Le geodetiche su S^m sono esattamente le circonferenze massimali, i.e. le intersezioni di S^m con gli iperpiani passanti per l'origine, parametrizzate per lunghezza d'arco. Il cut-locus di p è costituito dal suo punto antipodale q. Questo è punto ordinario di cut-locus, infatti è unito a p da infinite geodetiche minimizzanti. Tuttavia esso è anche valore singolare della mappa esponenziale in p. Infatti, per il Lemma 2 l'unico punto che può essere valore singolare di exp_p è proprio il punto q. Se quindi per assurdo q non fosse valore singolare per exp_p, allora, $exp_p : T_pM \approx \mathbb{R}^m \to M$ sarebbe un diffeomorfismo locale e quindi un'isometria Riemanniana locale rispetto alla metrica di pull-back $exp_p^* \langle \cdot, \cdot \rangle$. Inoltre questa nuova metrica su T_pM è completa per il Corollario 3 essendo completa nell'origine (le rette passanti per l'origine sono ancora geodetiche). Questo prova che exp_p è una mappa di rivestimento in accordo al seguente lemma.

Lemma 3. *Sia $F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ un'isometria Riemanniana locale. Se M è completa, allora F è una mappa di rivestimento Riemanniano.*

Ora, T_pM è semplicemente connesso, dunque exp_p è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^m$ su S^m. Contraddizione.

1.3.3 Teorema di densità di Bishop

Vogliamo ora presentare il risultato fondamentale di questa sezione. Mostreremo che, dato un punto $p \in M$ varietà Riemanniana completa, $cut(p)$

coincide con la chiusura di tutti i punti ordinari. Il teorema risale ad un lavoro di R. Bishop [Bi], successivamente semplificato e leggermente esteso da F.-E. Wolter [Wo], di cui ripercorriamo la dimostrazione. In accordo a questi risultati se la funzione distanza da un'origine fissata è differenziabile allora il cut-locus relativo a tale origine è vuoto, e di conseguenza la varietà Riemanniana in questione ha il tipo di diffeomorfismo di $\mathbb{R}^m$ poiché la mappa esponenziale realizza un diffeomorfismo.

Teorema 10. *Sia M varietà Riemanniana completa e sia $p \in M$. Allora i punti ordinari di $cut\,(p)$ sono densi in $cut\,(p)$.*

Per la Proposizione 5 essendo il cut-locus di p chiuso in M, ricaviamo che $cut\,(p)$ è la chiusura dei punti ordinari di $cut\,(p)$.
In particolare mettiamo in luce il seguente

Corollario 4. *Se $cut\,(p)$ è un insieme discreto. Allora per ogni $q \in cut\,(p)$, q è un punto ordinario. Viceversa se i punti ordinari di $cut\,(p)$ formano un insieme chiuso e discreto allora questo insieme coincide con $cut\,(p)$.*

Ricordandoci della Proposizione 9 segue anche che c'è un insieme denso di punti in $cut\,(p)$ per cui la funzione distanza $r\,(x)$ da p non è differenziabile. Evidenziamo anche il seguente risultato.

Corollario 5. *Sia M varietà Riemanniana completa. Se la funzione distanza $r\,(x)$ da un origine fissata p è $\mathcal{C}^\infty$ (differenziabile) su una bolla $B\,(p,R)$ allora si ha che $cut\,(p) \cap B\,(p,R) = \emptyset$, i.e., $inj\,(p) \geq R$. Se inoltre la funzione distanza da p è liscia (differenziabile) su tutto M allora exp_p realizza un diffeomorfismo di T_pM su M.*

Dimostrazione. Incominciamo mostrando la prima parte. Per assurdo, sia $q \in cut\,(p) \cap B\,(p,R) \neq \emptyset$. Per il Teorema 10 esiste $\{q_k\}$ successione di punti di cut-locus ordinari tale che $q_k \to q$ per $k \to \infty$. Poiché $q \in B\,(p,R)$ aperto esistono inoltre $\epsilon > 0$ e $\bar{k}$ tali che $q_k \in B\,(q,\epsilon) \subset B\,(p,R)$ $\forall k > \bar{k}$. Quindi, possiamo applicare la (dimostrazione della) Proposizione 9 e concludere che r non è liscia in $q_k \in B\,(p,R)$. Contraddizione. Per mostrare la seconda parte basta notare che, in virtù di quanto osservato sopra, exp_p è un diffeomorfismo da T_pM in M nel caso in cui $cut\,(p)$ sia vuoto. $\square$

Combinando il Corollario 5 con la Proposizione 8 otteniamo inoltre il seguente

Corollario 6. *Sia M varietà Riemanniana completa e $p \in M$ con $inj\,(p) \geq r$. Allora $r\,(x)$ è liscia su $B\,(p,r)$ e $exp_p\,(\partial B^m_r) = \partial B\,(p,r)$.*

Occupiamoci ora della dimostrazione del Teorema 10. Ci servirà il seguente risultato.

Lemma 4. *Sia γ_j una successione di geodetiche minimizzanti in una varietà Riemanniana completa e supponiamo che ciascun γ_j unisca p a q_j. Se $\{q_j\}$ converge a q allora una sottosequenza di $\{\gamma_j\}$ converge ad una geodetica minimizzante da p a q.*

Dimostrazione. Siano η_j i vettori tangenti in p a γ_j i.e. $\gamma_j(t) = exp_p(t\eta_j)$ con $t \in [0, d(p, q_j)]$. Poiché ∂B_1^m è compatto esiste una sottosuccessione convergente $\eta_{j_k} \to \eta \in \partial B_1^m$. Osserviamo che $d(p, q_j) \to d(p, q)$ per $j \to \infty$. Consideriamo ora $\gamma(t) = exp_p(t\eta)$ con $t \in [0, d(p, q)]$. Allora $\gamma_j \to \gamma$ puntualmente. Infatti, essendo exp_p continua,

$$\gamma_j(t) = exp_p(t\eta_j) \to exp_p(t\eta) = \gamma(t).$$

Inoltre γ è geodetica minimizzante infatti usando la convergenza puntuale di $\{\gamma_j\}$ a γ e la proprietà delle γ_j di essere minimizzanti e parametrizzate per lunghezza d'arco si ha che per ogni $s, t \in [0, d(p, q)]$

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) = \lim_j d(\gamma_j(s), \gamma_j(t)) = |s - t|.$$

□

Dimostrazione. (del Teorema 10) Sia $\overline{B_\delta^m}(x_0)$ la bolla chiusa con centro $x_0 \in \partial B_1^m(p) \subset T_pM$ e raggio $\delta > 0$. Se $c(x_0) = r < \infty$ e δ è sufficientemente piccolo, allora per il Teorema 7 la funzione $c : \overline{B_\delta^m}(x_0) \cap \partial B_1^m(p) \to \mathbb{R}$ è continua. Consideriamo ora il cono

$$Co(x_0, \delta) = \left\{tx : \ 0 \le t \le 1, x \in \overline{B_\delta^m}(x_0) \cap \partial B_1^m(p)\right\}$$

in T_pM. Per δ sufficientemente piccolo dalla continuità di c otteniamo che sia $Co(x_0, \delta)$ che

$$Co^*(x_0, \delta) = \{x' : \ x' = c(x/\|x\|)\,x,\ 0 \neq x \in Co(x_0, \delta)\} \cup \{0\}$$

sono omeomorfi ad una bolla chiusa euclidea.
Supponiamo che $exp_p(c(x_0)\,x_0) = q$ sia un punto singolare di $cut(p)$. Mostreremo che in ogni intorno di q esiste un punto ordinario di $cut(p)$. Supponiamo infatti che questo non sia vero. Allora per ogni $\delta > 0$ abbastanza piccolo fissato, $exp_p : Co^*(x_0, \delta) \to M$ è iniettiva e quindi risulta essere, per l'argomento compatto-Hausdorff, un omeomorfismo sull'immagine. Ora, sia $B(q, \epsilon)$ una bolla aperta in M centrata in q con raggio arbitrario $\epsilon > 0$, allora

$$B(q, \epsilon) \cap (exp_p(Co^*(x_0, \delta)))^C \neq \emptyset.$$

Infatti $c(x_0)$ ha in $Co^*(x_0, \delta)$ un intorno omeomorfo ad un semipiano Euclideo chiuso m-dimensionale. Quindi possiamo considerare una sequenza $\{q_j\}$ di punti con $q_j \in B(q, 1/j) \setminus exp_p Co^*(x_0, \delta)$.
Per ogni q_j esiste una geodetica minimizzante γ_j da p a q_j poiché M è completa, anche se questa in generale non è unica e per il Lemma 4 si ha che una sottosuccessione delle γ_j converge ad una geodetica minimizzante $\tilde{\gamma}$ da p a q. In questo modo i vettori tangenti in p a γ_j convergono a $\tilde{x}$ tangente a $\tilde{\gamma}$ in p. Osserviamo che poiché $q_j \notin exp_p(Co^*(x_0, \delta))$ tutti i vettori tangenti alle γ_j in p giacciono fuori da $Co(x_0, \delta)$. Inoltre ogni successione di $\partial B_1^m(p)$ convergente a x_0 deve, da un certo punto in poi, stare in $\overline{B_\delta^m}(x_0) \cap \partial B_1^m(p)$ poiché x_0 è un punto interno di questo insieme. Concludiamo quindi che $\tilde{x} \neq x_0$ e $\tilde{\gamma} \neq \gamma$, contraddicendo l'ipotesi che q non sia un punto ordinario di $cut(p)$. $\square$

Capitolo 2

Caratterizzazione degli spazi di forme

2.1 Modelli

Fissiamo un punto o in una varietà Riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e sia $r : D_o = exp_o(D(o)) \to \mathbb{R}$ la funzione distanza da o. Ricordiamo che il campo vettoriale radiale ∂_r è il campo unitario definito su $D_o \setminus \{o\}$ tale che, per ogni $x \in D_o \setminus \{o\}$, $\partial_r(x)$ è il vettore unitario tangente all'unica geodetica uscente da o che congiunge o a x. Diciamo che un 2-piano $\pi \subset T_x M$ è un piano radiale se $\partial_r(x) \in \pi$. In particolare ogni 2-piano in $T_o M$ è un piano radiale. Con il termine curvatura sezionale radiale di M intendiamo la restrizione della funzione curvatura sezionale a tutti i piani radiali. Siamo ora pronti per dare la definizione di modelli (leggermente estesa rispetto a quella di R. Greene e H.H. Wu. [GW]; vedi [Pet1]).

Definizione 11. *Fissata una funzione liscia e pari $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chiamiamo modello (a simmetria rotazionale) m-dimensionale con curvatura sezionale radiale $-G(r)$ la varietà Riemanniana M^m_{-G} omeomorfa a $\mathbb{R}^m$ data da*

$$M^m_{-G} = \left([0, r_{-G}) \times S^{m-1}, dr \otimes dr + g(r)^2 \, d\vartheta^2\right),$$

ove $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è l'unica soluzione del problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} g'' & = Gg \\ g(0) & = 0 \\ g'(0) & = 1 \end{array} \right. \tag{2.1}$$

e $r_{-G} \in (0, +\infty]$ è il primo zero di $g(r)$ nell'intervallo $(0, +\infty]$. Ovviamente, nel caso in cui $g(r) > 0$ per ogni $r > 0$, usiamo la convenzione $r_{-G} = +\infty$.

Facciamo alcune osservazioni:

1. In prima analisi la metrica Riemanniana a simmetria rotazionale è definita solo sul disco bucato $([0, r_G) \times S^{m-1}) \setminus \{o\}$. Tuttavia, il fatto che G sia pari, unitamente alla (2.1), implica che le derivate di ordine pari di g in $r = 0$ sono tutte nulle. Questo garantisce che la metrica è ben definita e liscia su tutto il disco in accordo al seguente

   Lemma 5. *Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è liscia e $g(0) = 0$, allora otteniamo una metrica liscia in $r = 0$ se e solo se*

   $$g^{(pari)}(0) = 0,$$
   $$g'(0) = 1.$$

   Se inoltre $g(r_{-G}) = 0$, allora otteniamo una metrica liscia in $r = r_{-G}$ se e solo se

   $$g^{(pari)}(r_{-G}) = 0,$$
   $$g'(r_{-G}) = -1.$$

2. Nella definizione abbiamo parlato di primo zero di g. Si noti infatti che g è crescente in un intorno di 0^+ e quindi è ivi positiva.

3. Si noti che se G è non negativa abbiamo che $r_{-G} = +\infty$. Infatti, integrando la (2.1) ricaviamo che

   $$g'(r) = 1 + \int_0^r G(t)\, g(t)\, dt.$$

   Poiché $g'(0) > 0$ e $g > 0$ in un intorno di 0 deduciamo che g' è positiva dove lo è g. Quindi $g > 0$ su $(0, +\infty)$.

4. Nel contesto dei modelli, (r, ϑ) sono proprio le coordinate geodetiche polari intorno al punto $o = 0 \in \mathbb{R}^m$ e r rappresenta proprio la funzione distanza dal punto o. In particolare, in accordo al teorema di Hopf-Rinow, M^m_{-G} è completa se $r_{-G} = +\infty$.

Nel caso dei modelli abbiamo il seguente risultato per l'Hessiana della funzione distanza.

Proposizione 10. *Sia M^m_{-G} un modello con metrica $\langle \cdot\,, \cdot \rangle = dr \otimes dr + g\left(r\right)^2 d\vartheta^2$ in coordinate geodetiche polari intorno al punto o. Allora su $M \backslash \{o\}$ l'Hessiana della funzione distanza soddisfa*

$$Hess\left(r\right) = \frac{g'}{g}\left(\langle \cdot\,, \cdot \rangle - dr \otimes dr\right)$$

Dimostrazione. Per le proprietà della derivata di Lie si ha che

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(dr \otimes dr\right) =& \mathcal{L}_{\partial_r}\left(dr\right) dr + dr \mathcal{L}_{\partial_r}\left(dr\right)\\ =& i_{\partial_r} d\left(dr\right) + d\left(i_{\partial_r} dr\right)\\ =& 0 + d\left(dr\left(\partial_r\right)\right) = 0.\end{aligned}$$

Inoltre $d\vartheta^2$ non dipende da r e quindi ricordandoci della (1.5) otteniamo che

$$\begin{aligned}2Hess\left(r\right) =& \mathcal{L}_{\partial_r}\left(g^2 d\vartheta^2\right)\\ =& \partial_r\left(g^2\right) d\vartheta^2 + g^2 \mathcal{L}_{\partial_r}\left(d\vartheta^2\right)\\ =& 2g\left(\partial_r g\right) d\vartheta^2\\ =& 2\frac{\partial_r g}{g}\left(\langle \cdot\,, \cdot \rangle - dr \otimes dr\right).\end{aligned}$$

□

Esempi interessanti di modelli si ottengono a partire dagli spazi di forme. Si ricordi che uno spazio di forme è una varietà Riemanniana completa, semplicemente connessa di curvatura sezionale costante. In accordo al teorema di classificazione di Hopf gli spazi di forme sono, a meno di isometrie,

1. $\mathbb{R}^m$ quando la curvatura k è nulla.

2. S^m_k sfera standard m-dimensionale di curvatura costante k per $k > 0$.

3. $\mathbb{H}^m_k$ spazio iperbolico m-dimensionale standard di curvatura costante k per $k < 0$.

Nei prossimi esempi M^m_{-G} denoterà sempre un modello con curvatura sezionale radiale $-G$ e metrica $\langle \cdot\,, \cdot \rangle = dr \otimes dr + g\left(r\right)^2 d\vartheta^2$ in coordinate polari geodetiche.

Esempio 1. *Se prendiamo $G \equiv 0$ otteniamo dalla (2.1) che $g\left(r\right) = r$ e $r_{-G} = r_0 = +\infty$ poiché $g\left(r\right) > 0$ per $r > 0$.*
Ma allora $M^m_0 = \left(\left[0, +\infty\right) \times S^{m-1}, \langle \cdot\,, \cdot \rangle = dr \otimes dr + r^2 d\vartheta^2\right)$ e questo è esattamente $\mathbb{R}^m$ con la metrica piatta scritta in coordinate polari. Quindi un

modello con curvatura sezionale radiale nulla è isometrico a $(\mathbb{R}^m, can_{\mathbb{R}^m})$. *Inoltre per la Proposizione 10 concludiamo che su* $M_0^m \setminus \{o\}$ *vale*

$$Hess\,(r) = \frac{1}{r}\left(\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle - dr \otimes dr\right).$$

Esempio 2. *Consideriamo* $G\,(r) \equiv k$ *per qualche costante positiva* k. *Integrando l'equazione (2.1) otteniamo* $g\,(r) = k^{-\frac{1}{2}} sinh\left(k^{\frac{1}{2}} r\right)$. *Inoltre* $r_{-k} = +\infty$ *e* $M_{-k}^m = \left([0, +\infty) \times S^{m-1}, \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle = dr \otimes dr + k^{-1}\sinh^2\left(k^{\frac{1}{2}} r\right) d\vartheta^2\right)$ *risulta essere isometrico allo spazio iperbolico standard di curvatura costante* $-k$. *Per la Proposizione 10 abbiamo che su* $M_{-k}^m \setminus \{o\}$ *vale*

$$\begin{aligned} Hess\,(r) =& \frac{\cosh\left(k^{\frac{1}{2}} r\right)}{k^{-\frac{1}{2}}\sinh\left(k^{\frac{1}{2}} r\right)}\left(\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle - dr \otimes dr\right) \\ =& k^{\frac{1}{2}}\coth\left(k^{\frac{1}{2}} r\right)\left(\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle - dr \otimes dr\right). \end{aligned}$$

Esempio 3. *Sia* $G \equiv -k$ *con* k *costante positiva. Allora risolvendo l'equazione (2.1) otteniamo* $g\,(r) = k^{-\frac{1}{2}}\sin\left(k^{\frac{1}{2}} r\right)$ *e l'intervallo massimale dove* g *è positiva è* $\left(0, \pi/k^{\frac{1}{2}}\right)$ *i.e.* $r_k = \pi/k^{\frac{1}{2}}$.
Il modello $M_k^m = \left([0, r_k) \times S^{m-1}, \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle = dr \otimes dr + k^{-1}\sin^2\left(k^{\frac{1}{2}} r\right) d\vartheta^2\right)$ *risulta essere isometrico alla sfera standard con curvatura costante* k *privata di un punto. Basta infatti considerare le coordinate geodetiche* (r, ϑ) *rispetto ad un polo (e.g. il polo Sud* S*), con* $\vartheta \in S^{m-1}$ *e* $r \in \left[0, \pi/k^{\frac{1}{2}}\right)$ *e il modello è isometrico a* $S^m \setminus \{N\}$, *ove con* N *abbiamo indicato il polo Nord della sfera. Per la Proposizione 10 abbiamo che su* $M_k^m \setminus \{o\}$ *vale*

$$\begin{aligned} Hess\,(r) =& \frac{\cos\left(k^{\frac{1}{2}} r\right)}{k^{-\frac{1}{2}}\sin\left(k^{\frac{1}{2}} r\right)}\left(\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle - dr \otimes dr\right) \\ =& k^{\frac{1}{2}}\cot\left(k^{\frac{1}{2}} r\right)\left(\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle - dr \otimes dr\right). \end{aligned}$$

2.2 Teoremi di caratterizzazione

L'esistenza di funzioni che soddisfino un certo sistema differenziale su una varietà Riemanniana spesso fornisce informazioni sulla struttura della varietà soggiacente. Lo scopo di questo capitolo è dare una caratterizzazione degli spazi di forme studiando le varietà Riemanniane complete $(M, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ che ammettono una soluzione non banale all'equazione differenziale

$$Hess\,(u) = (ku + h)\,\langle \cdot\,, \cdot \rangle\,, \tag{2.2}$$

con k, h costanti non entrambe nulle. Il risultato che presentiamo è frutto di lavori di M. Obata [Ob], M. Kanai [Ka] e Y. Tashiro [Ta]. Tuttavia l'approccio da noi seguito è più generale, unificante e, come vedremo, lascia intuire quale sia la direzione da seguire per la caratterizzazione di altri modelli, a curvatura non necessariamente costante.

Osserviamo innanzitutto che per $k \neq 0$ la costante h non ha ruolo. Infatti raccogliendo a fattor comune otteniamo

$$Hess\,(u) = k\left(u + \frac{h}{k}\right)\langle \cdot\,, \cdot \rangle\,.$$

Ponendo ora

$$v = u + \frac{h}{k},$$

poiché h, k sono costanti si ha che

$$Hess\,(v) = kv\,\langle \cdot\,, \cdot \rangle\,. \tag{2.3}$$

In virtù di questo fatto per $k \neq 0$ l'oggetto del nostro studio saranno varietà Riemanniane complete che ammettono soluzioni non banali della (2.3). Più dettagliatamente i risultati che vogliamo ottenere sono i seguenti.

Teorema 11. *Sia $(M, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ varietà Riemanniana completa e connessa di dimensione m. Allora condizione necessaria e sufficiente affinché M sia isometrica alla sfera di curvatura costante $k > 0$ è che M supporti una soluzione liscia non banale $u : M \to \mathbb{R}$ del sistema differenziale*

$$Hess\,(u)\,(x) = -ku\,(x)\,\langle \cdot\,, \cdot \rangle\,. \tag{2.4}$$

Teorema 12. *Sia $(M, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ varietà Riemanniana completa e connessa di dimensione m. Allora condizione necessaria e sufficiente affinché M sia isometrica allo spazio iperbolico di curvatura costante $k < 0$ è che M supporti una soluzione liscia non banale $u : M \to \mathbb{R}$ del sistema differenziale*

$$Hess\,(u)\,(x) = -ku\,(x)\,\langle \cdot\,, \cdot \rangle \tag{2.5}$$

con esattamente un punto critico.

Il caso $k = 0$ si riduce al seguente

Teorema 13. *Sia* $(M, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ *varietà Riemanniana completa e connessa di dimensione* m. *Allora condizione necessaria e sufficiente affinché* M *sia isometrica allo spazio Euclideo* m*-dimensionale è che* M *supporti una soluzione liscia non banale* $u : M \to \mathbb{R}$ *dell'equazione differenziale*

$$Hess\,(u)\,(x) = h\,\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle\,, \tag{2.6}$$

con h *costante non nulla.*

2.3 Caratterizzazione 'locale'

Definiamo $sn_k\,(t)$ come l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{sn}_k + k sn_k = 0 \\ sn_k\,(0) = 0 \\ \dot{sn}_k\,(0) = 1. \end{cases}$$

Esplicitamente otteniamo

$$sn_k\,(t) = \begin{cases} k^{-\frac{1}{2}} \sin\left(k^{\frac{1}{2}} t\right) & k > 0 \\ (-k)^{-\frac{1}{2}} \sinh\left((-k)^{\frac{1}{2}}\,t\right) & k < 0 \\ t & k = 0. \end{cases}$$

Poniamo poi

$$cn_k\,(t) = \dot{sn}_k\,(t) = \begin{cases} \cos\left(k^{\frac{1}{2}} t\right) & k > 0 \\ \cosh\left((-k)^{\frac{1}{2}}\,t\right) & k < 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

e

$$in_k\,(t) = \int_0^t sn_k\,(s)\,ds = \begin{cases} -k^{-1}\,cn_k\,(t) + k^{-1} & k \neq 0 \\ \frac{1}{2} t^2 & k = 0 \end{cases}$$

Con queste notazioni procediamo ora con la dimostrazione dei teoremi.
La parte di necessarietà segue da calcoli diretti. Infatti, abbiamo visto negli Esempi 1, 2, 3 che, scegliendo opportune coordinate polari (r, ϑ) con $r \in [0, r_k)$ e $\vartheta \in S^{m-1}$ e indicando con S_k^m e $\mathbb{H}_k^m$ rispettivamente la sfera m-dimensionale di curvatura costante $k > 0$ con polo Nord N e lo spazio iperbolico m-dimensionale di curvatura costante $k < 0$, si ha che

$$\mathbb{R}^m = M_0^m = \left([0, +\infty) \times S^{m-1}, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle = dr \otimes dr + r^2 d\vartheta^2\right).$$

$$\mathbb{H}_k^m = M_k^m = \left([0, +\infty) \times S^{m-1}, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle = dr \otimes dr + (-k)^{-1} \sinh^2\left(\sqrt{-k}r\right) d\vartheta^2\right).$$

$$S_k^m \setminus \{N\} = M_k^m = \left([0, r_k) \times S^{m-1}, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle = dr \otimes dr + k^{-1} \sin^2\left(\sqrt{k}r\right) d\vartheta^2\right).$$

Per $k \neq 0$ consideriamo la funzione radiale liscia $u : M_k^m \to \mathbb{R}$ definita da

$$u(r, \vartheta) = -k\, in_k(r) + 1 = cn_k(r).$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}
&\nabla u(x) = -k\, sn_k(r(x))\, dr.\\
&Hess(u)(x) = -k\, cn_k(r(x))\, dr \otimes dr - k\, sn_k(r(x))\, Hess(r)(x).
\end{aligned}$$

Utilizzando la Proposizione 10 e in particolare quanto abbiamo calcolato negli Esempi 2 e 3 otteniamo che su M_k^m vale

$$\begin{aligned}
Hess(u)(x) =& - k\, cn_k(r(x))\, dr \otimes dr\\
& - k\, sn_k(r(x)) \frac{cn_k(r(x))}{sn_k(r(x))} \left(\langle \cdot\,, \cdot \rangle - dr \otimes dr\right)\\
=& - k\, cn_k(r(x))\, dr \otimes dr\\
& - k\, cn_k(r(x)) \left(\langle \cdot\,, \cdot \rangle - dr \otimes dr\right)\\
=& - k\, cn_k(r(x)) \langle \cdot\,, \cdot \rangle\\
=& - ku(x) \langle \cdot\,, \cdot \rangle.
\end{aligned}$$

Osserviamo che nel caso $k > 0$ per continuità abbiamo che u è soluzione di (2.4) su tutto S_k^m.
Per $k = 0$ definiamo invece la funzione

$$u(r, \vartheta) = \frac{1}{2} h r^2,$$

con h costante non nulla. Allora

$$\nabla u(x) = hr(x)\, dr,$$

e per quanto calcolato nell'Esempio 1 otteniamo che

$$\begin{aligned}
&Hess(u)(x) = h\, dr \otimes dr + hr(x)\, Hess(r)(x)\\
=& h\, dr \otimes dr + hr(x) \frac{1}{r(x)} \left(\langle \cdot\,, \cdot \rangle - dr \otimes dr\right)\\
=& h\, dr \otimes dr + h \left(\langle \cdot\,, \cdot \rangle - dr \otimes dr\right)\\
=& h \langle \cdot\,, \cdot \rangle.
\end{aligned}$$

Concentriamoci ora sulla parte di sufficienza.
Proviamo innanzitutto il seguente lemma.

Lemma 6. *Sia $(M, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ varietà Riemanniana geodeticamente completa e k costante. Consideriamo $u : M \to \mathbb{R}$ soluzione non banale di*

$$Hess\,(u) = f\,(u)\,\langle \cdot\,, \cdot \rangle\,, \tag{2.7}$$

con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Definiamo il campo vettoriale $e_1 = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$. Allora le curve integrali di e_1 sono geodetiche i.e. $D_{e_1} e_1 = 0$.

Dimostrazione. Osserviamo che per ogni X, campo vettoriale su M, vale che

$$\begin{aligned} X\left(\frac{1}{|\nabla u|}\right) =& D_X \frac{1}{|\nabla u|} = D_X\left(\frac{1}{\langle \nabla u, \nabla u\rangle^{\frac{1}{2}}}\right) \\ =& -\frac{1}{2}\frac{1}{\langle \nabla u, \nabla u\rangle^{\frac{3}{2}}}\;2\,\langle D_X \nabla u, \nabla u\rangle \\ =& -\frac{1}{\langle \nabla u, \nabla u\rangle}\left\langle D_X\nabla u, \frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right\rangle \\ =& -\frac{1}{|\nabla u|^2} Hess\,(u)\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}, X\right). \end{aligned}$$

Usando questa relazione si ha che

$$\begin{aligned} \left\langle D_X\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right), Y\right\rangle =& X\left(|\nabla u|^{-1}\right)\langle \nabla u, Y\rangle + \frac{1}{|\nabla u|}\langle D_X \nabla u, Y\rangle \\ =& \frac{1}{|\nabla u|} Hess\,(u)\,(X, Y) \\ &- \frac{1}{|\nabla u|^2} Hess\,(u)\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}, X\right)\langle \nabla u, Y\rangle\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Da (2.8) deduciamo che

$$\begin{aligned} D_{\nabla u}\frac{\nabla u}{|\nabla u|} =& \frac{1}{|\nabla u|} Hess\,(u)\,(\nabla u, \cdot)^\sharp - \frac{1}{|\nabla u|^2} Hess\,(u)\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \nabla u\right)\langle \nabla u, \cdot\rangle^\sharp \\ =& \frac{1}{|\nabla u|} Hess\,(u)\,(\nabla u, \cdot)^\sharp - \frac{1}{|\nabla u|^2} Hess\,(u)\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \nabla u\right)\nabla u \\ =& - Hess\,(u)\,(e_1, e_1)\,e_1 + Hess\,(u)\,(e_1, \cdot)^\sharp\,, \end{aligned}$$

ove $^\sharp$ denota l'isomorfismo musicale che associa alla 1-forma η il campo vettoriale $\eta^\sharp$ definito da $\left\langle \eta^\sharp, Y\right\rangle = \eta\,(Y)$ per ogni campo vettoriale Y su M. Otteniamo quindi da (2.7) che

$$D_{\nabla u}\frac{\nabla u}{|\nabla u|} = -f\,(u)\,\langle e_1, e_1\rangle\, e_1 + f\,(u)\, e_1 = 0.$$

Poiché

$$D_{\frac{\nabla u}{|\nabla u|}} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = \frac{1}{|\nabla u|} D_{\nabla u} \frac{\nabla u}{|\nabla u|},$$

otteniamo la tesi. □

Il seguente teorema gioca un ruolo fondamentale.

Teorema 14. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una varietà Riemanniana m-dimensionale* $(M, \langle \cdot\, , \cdot \rangle)$ *completa contenga una bolla* $B(o, R^*)$ *di raggio*

$$R^* = \begin{cases} \frac{\pi}{k^{\frac{1}{2}}} & k > 0 \\ +\infty & k \leq 0 \end{cases}$$

centrata in $o \in M$ *e che sia isometrica al modello* M_k^m *di curvatura sezionale radiale* k *è che esista una soluzione liscia* $u : B(o, R^*) \to \mathbb{R}$ *del problema*

$$\begin{cases} Hess(u)(x) = -ku(x) \langle \cdot\, , \cdot \rangle \\ u(o) = 1 \\ |\nabla u|(o) = 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

per $k \neq 0$*, oppure di*

$$\begin{cases} Hess(u)(x) = h \langle \cdot\, , \cdot \rangle \\ |\nabla u|(o) = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

per $k = 0, h \neq 0$.
Inoltre, se ciò accade, allora $u(x)$ *è una funzione radiale della forma*

$$u(x) = \begin{cases} -k\, in_k(r(x)) + 1 & k \neq 0 \\ \frac{1}{2} h r^2(x) & k = 0, \end{cases}$$

ove $r(x) = d(x, o)$.

Dimostrazione. Innanzitutto, verifichiamo che $B(o, R^*)$ non contiene cut-point. Infatti, si fissi $x \in B(o, R^*)$ e si scelga una geodetica minimizzante γ parametrizzata per lunghezza d'arco da o a x. Questa esiste sicuramente per completezza di M e $\gamma \subset B(o, R^*)$. Allora posto $y(t) = u \circ \gamma(t)$ si ha che y risolve

$$\begin{array}{lll} y''(t) = -ky & per & k \neq 0 \\ y''(t) = h & per & k = 0 \end{array}$$

Infatti si ha che

$$\frac{d}{dt}(u \circ \gamma)(t) = \langle \nabla u(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle . \tag{2.11}$$

Quindi utilizzando le (2.9), (2.10) e il fatto che γ è geodetica parametrizzata per lunghezza d'arco i.e. $D_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ e $|\dot\gamma| = 1$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}(u\circ\gamma)(t) =& \frac{d}{dt}\langle\nabla u(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle \\ =& \left\langle D_{\dot\gamma}\nabla u(\gamma(t)), \dot{\gamma(t)}\right\rangle + \langle\nabla u(\gamma(t)), D_{\dot\gamma}\dot\gamma(t)\rangle \\ =& \left\langle\left(D_{\dot\gamma(t)}\nabla u\right)(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\right\rangle \\ =& Hess(u)|_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) \\ =& \left(-ku|_{\gamma(t)} + h\right)\langle\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle \\ =& (-ku\circ\gamma + h)(t).\end{aligned}$$

Quindi

$$y'' = -ky + h.$$

Inoltre $y(t)$ soddisfa

$$y'(0) = \langle\nabla u(o), \dot\gamma(0)\rangle = 0,$$

e, per $h = 0$,

$$y(0) = 1.$$

Segue che

$$y(t) = \begin{cases} - \quad k\, in_k(t) + 1 & \text{per} \quad k \neq 0 \\ \frac{1}{2}ht^2 & \text{per} \quad k = 0. \end{cases}$$

Prendendo $t = r(x)$ otteniamo

$$u(x) = u\circ\gamma(r(x)) = y(r(x)) = \begin{cases} - \quad k\, in_k(r(x)) + 1 & \text{per} \quad k \neq 0 \\ \frac{1}{2}hr^2(x) & \text{per} \quad k = 0. \end{cases}$$

In particolare abbiamo ottenuto che $u : B(o, R^*) \to \mathbb{R}$ è radiale.
Osserviamo ora che $y(t)$ è un diffeomorfismo per $0 < t < R^*$ poiché

$$y'(t) = \begin{cases} - \quad k\, sn_k(t) & \text{per} \quad k \neq 0 \\ ht & \text{per} \quad k = 0 \end{cases}$$

che è non nullo su $(0, R^*)$. Quindi $r(x) = y^{-1}\circ u(x)$ è liscia in $B(o, R^*)$. Per il Corollario 5 possiamo concludere che $cut(o)\cap B(o, R^*) = \emptyset$.
$B(o, R^*)$ cade dunque all'interno del dominio delle coordinate normali. In particolare, per ogni $p \in B(o, R^*)\backslash\{o\}$ esiste un'unica geodetica minimizzante che congiunge o a p e quindi la mappa esponenziale introduce su $B(o, R^*)$ coordinate geodetiche polari (r, ϑ). Infatti, prendiamo un frame ortonormale locale $\{E_\alpha\}_{\alpha=2}^m$ sulla sfera unitaria in T_oM e estendiamo questi campi in modo

radiale. Quindi, definiamo $E_1 \equiv \nabla r$. Se denotiamo il rispettivo riferimento duale con $\{\vartheta^1 = dr, \vartheta^\alpha : \alpha = 2, \ldots, m\}$ allora, il pull-back tramite la mappa esponenziale della metrica di M ha la forma

$$exp_o^* \langle \cdot\, , \cdot \rangle = dr \otimes dr + \sum_{\alpha,\beta=2}^{m} \sigma_{\alpha\beta}(r, \vartheta)\, \vartheta^\alpha \otimes \vartheta^\beta,$$

dove

$$\sum_{\alpha=2}^{m} \vartheta^\alpha \otimes \vartheta^\alpha$$

è la metrica standard della sfera unitaria $(m-1)$-dimensionale.
Vogliamo provare ora che $B(o, R^*)$ è isometrica al modello M_k^m.
Incominciamo osservando che per ogni campo vettoriale X su M vale

$$Hess\,(r)\,(\nabla r, X) = 0. \tag{2.12}$$

Infatti, per il Lemma di Gauss,

$$|\nabla r|^2 = \langle \nabla r, \nabla r \rangle = 1,$$

ed applicando X ad entrambi i membri otteniamo

$$2 \langle D_X \nabla r, \nabla r \rangle = 2Hess\,(r)\,(\nabla r, X) = 0.$$

Ricordiamo che, per $k \neq 0$, abbiamo ottenuto

$$u(x) = -k\, in_k(r(x)) + 1,$$

da cui

$$\nabla u(x) = -k \nabla r\, (\dot{in}_k)(r(x)) = -k\, sn_k(r(x))\, \nabla r.$$

Otteniamo quindi su $B(o, R^*) \setminus \{o\}$

$$\nabla r = \frac{\nabla u}{-k\, sn_k(r)}.$$

Nel caso in cui $k = 0$ abbiamo invece che

$$u(x) = \frac{1}{2} r^2(x).$$

Quindi

$$\nabla u(x) = hr(x)\, \nabla r,$$

da cui otteniamo la validità su $B(o,R^{*})\setminus\{o\}$ di

$$\nabla r=\frac{\nabla u}{hr(x)}.$$

Proviamo ora che per $k\neq 0$

$$Hess(r)=\frac{cn_k(r(x))}{sn_k(r(x))}\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle\,. \tag{2.13}$$

Per provare (2.13) ci limitiamo a considerare, in accordo a (2.12), campi vettoriali $X,Y\in(\nabla r)^{\perp}$. Allora

$$\begin{aligned} Hess(r)(X,Y)&=\langle D_X\nabla r,Y\rangle\\ &=\left\langle D_X\frac{\nabla u}{-k\,sn_k(r(x))},Y\right\rangle\\ &=\left\langle X\left(\frac{1}{-k\,sn_k(r(x))}\right)\nabla u,Y\right\rangle\\ &\quad+\frac{1}{-k\,sn_k(r(x))}\langle D_X\nabla u,Y\rangle\,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

D'altra parte, poiché $X\perp\nabla r$, si ha

$$\begin{aligned} X\left(\frac{1}{-k\,sn_k(r(x))}\right)&=\left\langle\nabla\left(\frac{1}{-k\,sn_k(r(x))}\right),X\right\rangle\\ &=-\frac{cn_k(r(x))}{k\,(sn_k(r(x)))^2}\langle\nabla r,X\rangle=0. \end{aligned}$$

Quindi, sostituendo in (2.14) e usando la (2.9),

$$\begin{aligned} Hess(r)(X,Y)=&0-\frac{1}{k\,sn_k(r(x))}Hess(u)(X,Y)\\ =&\frac{ku}{k\,sn_k(r(x))}\langle X,Y\rangle\\ =&\frac{-k\,in_k(r(x))+1}{sn_k(r(x))}\langle X,Y\rangle\\ =&\frac{cn_k(r(x))}{sn_k(r(x))}\langle X,Y\rangle\,, \end{aligned}$$

e resta così dimostrata la (2.13).

Similmente, per $k=0$ otteniamo

$$\begin{aligned}
Hess\left(r\right)\left(X,Y\right) =& \left\langle D_X \nabla r, Y\right\rangle \\
=& \left\langle D_X \frac{\nabla u}{hr\left(x\right)}, Y\right\rangle \\
=& \left\langle X\left(\frac{1}{hr\left(x\right)}\right)\nabla u, Y\right\rangle + \frac{1}{hr\left(x\right)}\left\langle D_X \nabla u, Y\right\rangle .
\end{aligned}$$

Inoltre, poiché $X \bot \nabla r$

$$\begin{aligned}
X\left(\frac{1}{hr\left(x\right)}\right) =& \left\langle \nabla\left(\frac{1}{hr\left(x\right)}\right), X\right\rangle \\
=& -\frac{1}{\left(hr\left(x\right)\right)^2}\left\langle \nabla r, X\right\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Da cui, come sopra,

$$Hess\left(r\right)\left(X,Y\right) = \frac{1}{hr} Hess\left(u\right)\left(X,Y\right) = \frac{1}{r}\left\langle X,Y\right\rangle .$$

Ricordiamo ora che dalla (1.5) sappiamo che

$$2Hess\left(r\right) = \mathcal{L}_{\partial_r}\left\langle \cdot\,,\,\cdot\right\rangle . \tag{2.15}$$

Considerando E_p, E_q campi vettoriali del frame o.n. locale $\{E_i\}_{i=1}^m$, $p,q \neq 1$, per quanto calcolato, si ha

$$2Hess\left(r\right)\left(E_p,E_q\right) = \begin{cases} 2\frac{cn_k(r)}{sn_k(r)}\sigma_{pq} & k \neq 0 \\ \frac{2}{r}\sigma_{pq} & k = 0. \end{cases}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\partial_r}\left\langle \cdot\,,\,\cdot\right\rangle\left(E_p,E_q\right) =& \left(\mathcal{L}_{\partial_r}\left(dr\otimes dr\right) + \sigma_{\alpha\beta}\vartheta^\alpha\otimes\vartheta^\beta\right)\left(E_p,E_q\right) \\
=& \partial_r\left(\sigma_{\alpha\beta}\right)\vartheta^\alpha\otimes\vartheta^\beta\left(E_p,E_q\right) + 0 \\
=& \partial_r\sigma_{pq}.
\end{aligned}$$

Dalla (2.15) e dal fatto che al primo ordine ogni metrica Riemanniana è Euclidea, otteniamo quindi, per $k \neq 0$, il sistema

$$\begin{cases} (i) & \partial_r\sigma_{pq}\left(r,\vartheta\right) = 2\frac{cn_k(r)}{sn_k(r)}\sigma_{pq}\left(r,\vartheta\right) \\ (ii) & \sigma_{pq}\left(r,\vartheta\right) = r^2\delta_{pq} + o\left(r^2\right) \text{ per } r\to 0. \end{cases}$$

Siano $\sigma^1_{pq}, \sigma^2_{pq}$ soluzioni di questo sistema, mostriamo che esse devono coincidere. Dalla (i) si ha che, per $i = 1, 2$,

$$\frac{\partial_r \sigma^i_{pq}}{\sigma^i_{pq}} = \frac{2cn_k(r)}{sn_k(r)},$$

da cui,

$$\partial_r \left(\log \sigma^i_{pq}\right) = 2\partial_r \left(\log sn_k(r)\right).$$

Otteniamo quindi che

$$\partial_r \left(\log \left(\frac{\sigma^i_{pq}}{sn^2_k(r)}\right)\right) = 0,$$

per $i = 1, 2$. In particolare

$$\partial_r \left(\log \left(\frac{\sigma^1_{pq}}{sn^2_k(r)}\right)\right) = \partial_r \left(\log \left(\frac{\sigma^2_{pq}}{sn^2_k(r)}\right)\right),$$

da cui

$$\partial_r \left(\log \left(\frac{\sigma^1_{pq}}{\sigma^2_{pq}}\right)\right) = 0.$$

Quindi

$$\log \left(\frac{\sigma^1_{pq}}{\sigma^2_{pq}}\right) = \tilde{f}(\vartheta),$$

per qualche funzione $\tilde{f}$ indipendente da r. Poniamo

$$\frac{\sigma^1_{pq}(r, \vartheta)}{\sigma^2_{pq}(r, \vartheta)} = f(\vartheta).$$

Usando la (ii) otteniamo che per $r \to 0$

$$r^2 \delta_{pq} + o\left(r^2\right) = f(\vartheta)\left(r^2 \delta_{pq} + o\left(r^2\right)\right),$$

e quindi $f(\vartheta) \equiv 1$.
Osserviamo ora che

$$\overline{\sigma_{pq}}(r) = sn^2_k(r)\, \delta_{pq}$$

è soluzione di (i) e (ii). Infatti, poiché

$$sn^2_k(r) = r^2 + o\left(r^2\right),$$

si ha che

$$\begin{aligned}\partial_r \overline{\sigma_{pq}}(r) =& 2sn_k(r)\,cn_k(r)\,\delta_{pq}\\ =& 2\frac{cn_k(r)}{sn_k(r)}sn_k^2(r)\,\delta_{pq}\\ =& 2\frac{cn_k(r)}{sn_k(r)}\overline{\sigma_{pq}}(r)\,,\\ \overline{\sigma_{pq}}(r) =& \left(r^2+o\left(r^2\right)\right)\delta_{pq} = r^2\delta_{pq}+o\left(r^2\right).\end{aligned}$$

Per quanto osservato sopra risulta che

$$\sigma_{pq}(r,\vartheta) = \begin{cases} sn_k^2(r) & p=q\\ 0 & p\neq q.\end{cases} \tag{2.16}$$

e quindi

$$exp_o^*\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle = dr\otimes dr + sn_k^2(r)\,d\vartheta^2.$$

In conclusione,

$$exp_o : M_k^m\setminus\{0\}\subset T_oM\to B(o,R^*)\setminus\{o\}$$

è un' isometria Riemanniana che, in accordo al Lemma 5 si estende ad un'isometria di M_k^m su $B(o,R^*)$.
Analogamente, per $k=0$, si ha

$$\begin{cases} \partial_r\sigma_{pq}(r,\vartheta) = \frac{2}{r}\sigma_{pq}\\ \sigma_{pq}(r,\vartheta) = r^2\delta_{pq}+o\left(r^2\right).\end{cases}$$

Ricalcando la dimostrazione fatta nel caso $k>0$ si ottiene l'unicità della soluzione di questo sistema. Inoltre

$$\overline{\sigma_{pq}}(r) = r^2\delta_{pq}$$

è soluzione. Infatti, si ha che

$$\begin{aligned}\partial_r\overline{\sigma_{pq}}(r) =& 2r\delta_{pq} = \frac{2}{r}r^2\delta_{pq} = \frac{2}{r}\overline{\sigma_{pq}}(r)\,,\\ \overline{\sigma_{pq}}(r) =& r^2\delta_{pq} = r^2\delta_{pq}+o\left(r^2\right).\end{aligned}$$

Per cui

$$\sigma_{pq}(r) = \begin{cases} r^2 & p=q\\ 0 & p\neq q.\end{cases}$$

Otteniamo quindi che su $B(o,R^*)\setminus\{o\}$

$$exp_o^*\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle = dr\otimes dr + r^2d\vartheta^2,$$

e di qui l'isometria con il modello M_0^m. □

2.4 Dimostrazione dei risultati principali

Il Teorema 12 discende immediatamente dal Teorema 14, osservando che, per $k < 0$, essendo $R^* = +\infty$, $B(o, R^*) = M$.
Per concludere la dimostrazione del Teorema 13 è sufficiente mostrare che la soluzione u di (2.6) ha un punto critico. Ci affidiamo al seguente

Lemma 7. *Sia $(M, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ una varietà Riemanniana completa e sia $u : M \to \mathbb{R}$ una soluzione liscia non banale di*

$$Hess\,(u) = h \langle \cdot\,, \cdot \rangle\,,$$

con $h \neq 0$ costante. Allora la funzione u ha esattamente un punto critico $p \in M$

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che $|\nabla u| \neq 0$ su M. Consideriamo il campo vettoriale $X = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$. Poiché $|X| = 1$ e M è geodeticamente completa si ha che X è campo vettoriale completo. Sia $\gamma : \mathbb{R} \to M$ una qualsiasi curva integrale di X. Allora per il Lemma 6 si ha che γ è una geodetica (non necessariamente minimizzante) parametrizzata per lunghezza d'arco. Osserviamo che, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u \circ \gamma)(t) &= \langle \nabla u(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \\ &= \left\langle \nabla u(\gamma(t)), \frac{\nabla u}{|\nabla u|}(\gamma(t)) \right\rangle \\ &= |\nabla u|(\gamma(t)). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Inoltre, lungo γ, l'equazione (2.6) si riduce all'equazione differenziale ordinaria

$$y'' = h, \tag{2.18}$$

ove con y abbiamo indicato la funzione $u \circ \gamma(t)$.
Le soluzioni y di (2.18) hanno la forma $\frac{h}{2}t^2 + At + B$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Abbiamo quindi che y ha esattamente un punto critico. In particolare, sia $t_0 > 0$ tale punto critico, vale

$$0 = y'(t_0) = \langle \nabla u(\gamma(t_0)), \dot{\gamma}(t_0) \rangle\,.$$

Tenendo conto di questo fatto, e sostituendo nella (2.17), otteniamo che u deve avere almeno un punto critico $\gamma(t_0)$. Contraddizione. □

Dimostriamo ora il Teorema 11. Proviamo innanzitutto un Lemma che analizza il ruolo della richiesta di esistenza di un punto critico per una soluzione di (2.4).

Lemma 8. *Sia* $(M, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ *una varietà Riemanniana completa e sia* $u : M \to \mathbb{R}$ *una soluzione liscia non banale di*

$$Hess\,(u) = -ku\,\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle\,,$$

con $k > 0$ *costante. Allora*

1. *Ogni punto critico di* u *è non degenere.*
2. *La funzione* u *ha almeno un punto critico* $p \in M$.

Dimostrazione. Sia γ una geodetica in M parametrizzata per lunghezza d'arco. Allora l'equazione (2.4) si riduce all'equazione differenziale ordinaria

$$y'' = -ky, \tag{2.19}$$

ove con y abbiamo indicato la funzione $u \circ \gamma\,(t)$.
Per provare il punto (1) è sufficiente mostrare che $\Sigma = u^{-1}\,(0)$ non contiene punti critici di u.
Per assurdo, sia $q \in \Sigma$ un punto critico per u. Sia $\gamma : \mathbb{R} \to M$ una geodetica parametrizzata per lunghezza d'arco uscente dal punto q. Poniamo $y\,(t) = u \circ \gamma\,(t)$ su $\mathbb{R}$. Ricordandoci di (2.11) notiamo che $y\,(t)$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' & = -ky \\ y\,(0) & = 0 \\ y'\,(0) & = 0 \end{cases}$$

e quindi $y \equiv 0$. Segue che $u = 0$ lungo la geodetica γ. Per ogni $x \in M$, poiché M è completa, esiste una geodetica che congiunge x a q. Questo prova, per quanto osservato sopra, che $M \subseteq \Sigma$ e dunque che $M = \Sigma$. Deduciamo che u deve essere la soluzione nulla. Contraddizione.

Proviamo ora il punto (2). Per assurdo, supponiamo che $|\nabla u| \neq 0$ su M. Consideriamo il campo vettoriale $X = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$. Poiché $|X| = 1$ e M è geodeticamente completa si ha che X è campo vettoriale completo. Sia $\gamma : \mathbb{R} \to M$ una qualsiasi curva integrale di X. Allora per il Lemma 6 si ha che γ è una geodetica (non necessariamente minimizzante) parametrizzata per lunghezza d'arco. Notiamo che, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,(u \circ \gamma)\,(t) &= \langle \nabla u\,(\gamma\,(t))\,, \dot{\gamma}\,(t) \rangle \\ &= \left\langle \nabla u\,(\gamma\,(t))\,, \frac{\nabla u}{|\nabla u|}\,(\gamma\,(t)) \right\rangle \\ &= |\nabla u|\,(\gamma\,(t))\,. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Senza perdere in generalità supponiamo ora $k = -1$ in modo che le soluzioni y di (2.19) siano della forma $A\cos t + B\sin t$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Allora

$$y(t) = u \circ \gamma(t) = A\cos t + B\sin t.$$

Abbiamo quindi che y ha infiniti punti critici. Se $t_0 > 0$ è un tale punto critico, allora

$$0 = y'(t_0) = \langle \nabla u(\gamma(t_0)), \dot{\gamma}(t_0) \rangle .$$

Tenendo conto di questo fatto, e sostituendo nella (2.20), otteniamo che u deve avere almeno un punto critico $\gamma(t_0)$. Contraddizione. $\square$

Per il Lemma 8 una soluzione di (2.4) ha almeno un punto critico, che possiamo supporre essere il punto $o \in M$. Per dimostrare il Teorema 11 possiamo quindi ridurci a provare il seguente

Teorema 15. *Sia $(M, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ una varietà Riemanniana completa. Scegliamo $o \in M$ origine di riferimento e poniamo $r(x) = d(x, o)$. Allora M è isometrica alla sfera standard S^m se e solo se M supporta una funzione a valori reali $u \neq 0$ con un punto critico in o e che soddisfi su $\overline{B}\left(o, \frac{\pi}{k^{\frac{1}{2}}}\right)$ l'equazione*

$$Hess(u)(x) = -ku \langle \cdot\,, \cdot \rangle .$$

Prima di procedere con la dimostrazione ricordiamo due noti teoremi della teoria di Morse.

Teorema 16 (Morse)**.** *Sia $f : M \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$. Sia $p \in M$ punto critico non degenere di f (i.e. $Hess(f)(p)$ non ha autovalori nulli), diciamo λ l'indice di Morse di p (i.e. il numero di autovalori negativi della matrice Hessiana in p). Allora esiste $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^m))$ carta locale di M centrata in p tale che su U*

$$f - f(p) = -\sum_{i=1}^{\lambda} \left(x^i\right)^2 + \sum_{j=\lambda+1}^{m} \left(x^j\right)^2 .$$

In particolare i punti critici non degeneri di f sono isolati dagli altri eventuali punti critici di f.

Teorema 17 (Reeb)**.** *Sia M una varietà differenziale m-dimensionale compatta e senza bordo, che supporta una funzione di Morse (i.e. i cui punti critici sono non degeneri) con solo due punti critici. Allora M è omeomorfa a S^m. Inoltre, se $1 \leq m \leq 6$, allora M è diffeomorfa a S^m.*

Richiamiamo anche che, in accordo al Teorema di classificazione di Hopf, una varietà completa, semplicemente connessa, m-dimensionale di curvatura costante k è isometrica a

$$\begin{cases} \mathbb{R}^m & se \quad k = 0 \\ S_k^m & se \quad k > 0 \\ \mathbb{H}_k^m & se \quad k < 0. \end{cases}$$

Dimostrazione. (del Teorema 15)
Per semplicità di notazione poniamo $R = \frac{\pi}{k^{\frac{1}{2}}}$.
Mostriamo che $\partial B(o,R) = \{O\}$, i.e. è formato da un solo punto $O \in M$.
Sia $x \in \partial B(o,R)$ e γ una geodetica minimizzante parametrizzata per lunghezza d'arco da o a x. Allora posto $y(t) = u \circ \gamma(t)$, si ha che y risolve

$$y'' = -ky.$$

Inoltre, per quanto osservato precedentemente,

$$y'(0) = \langle \nabla u(o), \dot{\gamma}(0) \rangle = 0$$

e, pur di normalizzare, si ha

$$y(0) = 1.$$

Segue che $y(t) = \cos\left(k^{\frac{1}{2}}t\right)$ e quindi, prendendo $t = r(x)$, otteniamo

$$u(x) = y(r(x)) = \cos\left(k^{\frac{1}{2}}r(x)\right).$$

Allora

$$|\nabla u| \circ \gamma(t) = k^{\frac{1}{2}} \sin\left(k^{\frac{1}{2}}t\right) \to 0 \ \text{ per } \ t \to R.$$

Quindi $\partial B(o,R)$ è fatto di punti critici di u. Per il punto (1) del Lemma 8 sappiamo che ogni punto critico di u è non degenere. In particolare, grazie al Teorema 16 tali punti critici sono isolati.

Tuttavia, per il Corollario 6, si ha che se $inj(o) \geq R$ allora

$$\exp_o\left(\partial B_R^m(0)\right) = \partial B(o,R).$$

Poiché exp_o è continua, essa mappa insiemi connessi in insiemi connessi. Per questo motivo si ha che l'insieme discreto $\partial B(o,R)$ è connesso e quindi formato da un solo punto.
Abbiamo provato che $\partial B(o,R) = \{O\}$ per qualche $O \in M$. Come conseguenza si ha che $\partial B_R^m(0)$ è tutto costituito da punti del cut-locus tangente e quindi $B_R^{m-1}(0)$ è il più grande stellato rispetto all'origine di T_oM sul quale

exp_o è un diffeomorfismo e $cut\,(o) = \{O\}$. Inoltre O è punto di cut-locus ordinario in accordo al Corollario 4. Poiché $cut\,(o)$ è compatto e non vuoto per la Proposizione 7 otteniamo in particolare che M è compatta.
In accordo al Teorema 17 si ha allora che M è omeomorfa alla sfera. Inoltre per il Teorema 14 si ha che $M \setminus \{O\}$ è isometrica al modello M_k^m i.e. per quanto osservato nell'Esempio 3 alla sfera privata di un punto. Quindi $M \setminus \{O\}$ ha curvatura costante k e per continuità anche M ha curvatura k. Poiché M è anche compatta e semplicemente connessa, in accordo al teorema di classificazione di Hopf otteniamo, come desiderato, che M è isometrica a S_k^m. □

Osservazione 2. *Nella dimostrazione avremmo potuto utilizzare il teorema di Seifert-Van Kampen in alternativa al teorema di Reeb per dedurre che M è semplicemente connessa usando il fatto che $M \setminus \{p\}$ è semplicemente connessa. Questo è quello che serve per applicare il teorema di classificazione di Hopf.*

Capitolo 3

Caratterizzazione di modelli

3.1 Risultati 'locali'

Nel Capitolo 2 abbiamo dato una caratterizzazione degli spazi di forme mediante certi sistemi differenziali. Tuttavia, l'approccio che abbiamo seguito nelle dimostrazioni è del tutto generale. La direzione naturale che si è portati a prendere è quella della caratterizzazione di varietà che supportano soluzioni di equazioni differenziali più generali della forma

$$Hess\,(u)\,(x) = H\,(r\,(x))\,u\,(x)\,\langle \cdot\,,\,\cdot\rangle\,, \tag{3.1}$$

ove $r\,(x)$ è la distanza da un punto privilegiato. D'altra parte si è portati a generalizzare questa caratterizzazione ad altre varietà modello, non necessariamente a curvatura costante.

Consideriamo quindi il modello M^m_{-G} con curvatura sezionale $-G\,(r)$ dato da

$$M^m_{-G} = \left([0, r_{-G}) \times S^{m-1}, dr \otimes dr + g\,(r)^2\, d\vartheta^2\right).$$

Abbiamo visto che per $G\,(r) = k \neq 0$ costante, la funzione radiale liscia $u : M^m_k \to \mathbb{R}$ data da

$$u\,(x) = u\,(r\,(x)) = -k\, in_k\,(r) + 1 = -k \int_0^r sn_k\,(t)\,dt + 1$$

è soluzione del sistema

$$\begin{cases} Hess\,(u)\,(x) = -ku\,\langle \cdot\,,\,\cdot\rangle \\ u\,(o) = 1 \\ |\nabla u|\,(o) = 0. \end{cases}$$

Inoltre, per $G\,(r) = 0$ la funzione radiale liscia $u : M^m_0 \to \mathbb{R}$ data da

$$u\,(x) = u\,(r\,(x)) = \frac{1}{2}hr^2 = h \int_0^r tdt$$

è soluzione del sistema

$$\begin{cases} Hess\,(u)\,(x) = h\,\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle \\ |\nabla u|\,(o) = 0, \end{cases}$$

con $h \neq 0$ costante.
In entrambi i casi quindi la soluzione dell'equazione differenziale del tipo (3.1) ha la forma

$$u\,(x) = A\int_0^{r(x)} g\,(t)\,dt + B,$$

con A, B costanti e $g\,(t) = sn_k\,(t)$. Queste osservazioni anticipano ciò che andiamo ora ad ottenere.

Consideriamo il modello M^m_{-G} e cerchiamo $u : M^m_{-G} \to \mathbb{R}$ soluzione radiale del sistema differenziale

$$\begin{cases} Hess\,(u)\,(x) = H\,(r\,(x))\,u\,(x)\,\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle \\ u\,(o) = 1 \\ |\nabla u|\,(o) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Osserviamo che la richiesta $u\,(o) = 1$ non fa perdere in generalità. Infatti, normalizzando otteniamo ancora una soluzione dell'equazione (3.1). Posto $u = \alpha\,(r)$, utilizzando la Proposizione 10, otteniamo

$$\begin{aligned} Hess\,(\alpha\,(r)) =& \alpha''\,(r)\,dr \otimes dr + \alpha'\,(r)\,Hess\,(r) \\ =& \alpha''\,(r)\,dr \otimes dr + \alpha'\,(r)\,\frac{g'}{g}\,(\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle - dr \otimes dr) \\ =& \left(\alpha''\,(r) - \alpha'\,(r)\,\frac{g'}{g}\right) dr \otimes dr + \alpha'\,(r)\,\frac{g'}{g}\,\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle\,. \end{aligned}$$

Dalla (3.2) si ha quindi

$$\left(\alpha''\,(r) - \alpha'\,(r)\,\frac{g'}{g}\right) dr \otimes dr + \alpha'\,(r)\,\frac{g'}{g}\,\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle = H\,(r)\,\alpha\,(r)\,\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle\,.$$

Il sistema che dobbiamo studiare è dunque il seguente

$$\begin{cases} (i)\;\alpha''\,(r) - \alpha'\,(r)\,\frac{g'}{g} = 0 \\ (ii)\;\alpha'\,(r)\,\frac{g'}{g} - H\,(r)\,\alpha\,(r) = 0, \end{cases}$$

con le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} &\alpha\,(0) = 1 \\ &\alpha'\,(0) = 0. \end{aligned}$$

Ponendo $\beta = \alpha'$ la (i) si riscrive come

$$\beta' - \beta(r)\frac{g'}{g} = 0.$$

Integrando, si ottiene

$$\beta(r) = Ag(r),$$

con $A \neq 0$ costante e quindi

$$\alpha(r) = A\int_0^r g(t)\,dt + 1.$$

Sostituendo ora in (ii) otteniamo

$$Ag\frac{g'}{g} - H(r)\left(A\int_0^r g(t)\,dt + 1\right) = 0,$$

da cui,

$$H(r) = \frac{Ag'(r)}{A\int_0^r g(t)\,dt + 1}.$$

Abbiamo dunque che, fissato $A \neq 0$ con la proprietà che

$$\sup\left\{T > 0 : A\int_0^t g(s)\,ds + 1 > 0 \text{ su } [0,T]\right\} \geq r_{-G},$$

la varietà modello M^m_{-G} ammette una funzione radiale liscia $u : M^m_{-G} \to \mathbb{R}$ definita da

$$u(x) = A\int_0^{r(x)} g(t)\,dt + 1$$

che è soluzione del sistema differenziale (3.2) in cui H è data da

$$H(r) = \frac{Ag'(r)}{A\int_0^r g(t)\,dt + 1}.$$

Quest'ultimo fatto ci suggerisce di formulare la prossima estensione del Teorema 14 che ci permetterà di dare una caratterizzazione di modelli in cui $g(r)$ e $H(r)$ sono opportunamente legati.

Teorema 18. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una varietà Riemanniana m-dimensionale completa $(M, \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ contenga una bolla $B(o, r_{-G})$ centrata in $o \in M$ e che sia isometrica al modello*

$$M^m_{-G} = \left([0, r_{-G}) \times S^{m-1}, dr \otimes dr + g(r)^2\,d\vartheta^2\right)$$

di curvatura sezionale $-G(r)$ *è che esista una soluzione liscia* $u : B(o, r_{-G}) \to \mathbb{R}$ *del problema*

$$\text{(3.3)} \qquad \begin{cases} Hess\,(u)\,(x) = H\,(r\,(x))\,u\,(x)\,\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle \\ u\,(o) = 1 \\ |\nabla u|\,(o) = 0, \end{cases}$$

ove $r(x) = d(x, o)$ *e*

$$H(t) = \frac{Ag'(t)}{A\int_0^r g(s)\,ds + 1},$$

per qualche numero reale $A \neq 0$ *tale che*

$$\sup\left\{T > 0\ :\ A\int_0^t g(s)\,ds + 1 > 0\ su\ [0, T]\right\} \geq r_{-G}.$$

Inoltre, se ciò accade, allora $u(x)$ *è la funzione radiale*

$$u(x) = A\int_0^{r(x)} g(s)\,ds + 1.$$

Dimostrazione. La parte di necessarietà è già stata provata. Occupiamoci ora della parte di sufficienza.
Sia $u : B(o, r_{-G}) \to \mathbb{R}$ soluzione di (3.2) su $B(o, r_{-G})$.
Mostriamo innanzitutto che la funzione $u : B(o, r_{-G}) \to \mathbb{R}$ è radiale. Infatti, si fissi $x \in B(o, r_{-G})$. Poiché M è completa possiamo prendere una geodetica minimizzante γ parametrizzata per lunghezza d'arco da o a x. Allora, posto $\alpha(t) = u \circ \gamma(t)$, si ha che α risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \alpha''(t) = \frac{Ag'(t)}{A\int_0^t g(s)ds+1}\alpha(t) \\ \alpha(0) = 1 \\ \alpha'(0) = \langle\nabla u(o), \dot\gamma(0)\rangle = 0. \end{cases}$$

Infatti, utilizzando la (3.2) e il fatto che γ è geodetica minimizzante parametrizzata per lunghezza d'arco, si ha

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(u\circ\gamma)(t) =& \frac{d}{dt}\langle\nabla u(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle \\ =& \langle D_{\dot\gamma}\nabla u(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle + \langle\nabla u(\gamma(t)), D_{\dot\gamma}\dot\gamma(t)\rangle \\ =& \left\langle\left(D_{\dot\gamma(t)}\nabla u\right)(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\right\rangle \\ =& Hess\,(u)\,|_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) \\ =& H(r(\gamma(t)))\,u(\gamma(t))\,\langle\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle \\ =& H(t)\,(u\circ\gamma(t)) \\ =& \frac{Ag'}{A\int_0^t g(s)\,ds + 1}\alpha(t). \end{aligned}$$

Segue che
$$\alpha(t) = A\int_0^t g(s)\,ds + 1,$$
e, prendendo $t = r(x)$, otteniamo
$$u(x) = u\circ\gamma(r(x)) = \alpha(r(x)) = A\int_0^{r(x)} g(s)\,ds + 1.$$
Osserviamo ora che $\alpha(t)$ è un diffeomorfismo per $0 < t < r_{-G}$ poiché
$$\alpha'(t) = Ag(t)$$
che è non nullo su $(0, r_{-G})$. Quindi $r(x) = \alpha^{-1}\circ u(x)$ è liscia in $B(o, r_{-G})$. Per il Corollario 5 possiamo concludere che $cut(o)\cap B(o, r_{-G}) = \emptyset$.
$B(o, r_{-G})$ cade dunque all'interno del dominio delle coordinate normali. In particolare, per ogni $p \in B(o, r_{-G})\setminus\{o\}$ esiste un'unica geodetica minimizzante che congiunge o a p e quindi la mappa esponenziale introduce su $B(o, r_{-G})$ coordinate geodetiche polari. Infatti, prendiamo un frame ortonormale locale $\{E_\alpha\}_{\alpha=2}^m$ sulla sfera unitaria in T_oM ed estendiamo questi campi in modo radiale. Quindi, definiamo $E_1 \equiv \nabla r$. Indicato il rispettivo frame duale con $\{\vartheta^1 = dr, \vartheta^\alpha : \alpha = 2, \ldots, m\}$, otteniamo, come al solito, che su $B(o, r_{-G})\setminus\{o\}$ la metrica Riemanniana di M si scrive
$$\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle = dr\otimes dr + \sum_{\alpha,\beta=2}^m \sigma_{\alpha\beta}(r,\vartheta)\,\vartheta^\alpha\otimes\vartheta^\beta.$$
Analogamente a quanto fatto nella dimostrazione del Teorema 14, proviamo ora che $B(o, r_{-G})$ è isometrica al modello M^m_{-G}.
Ricordiamo che, per ogni campo vettoriale X su M, si ha che
$$Hess(r)(\nabla r, X) = 0. \tag{3.4}$$
Abbiamo ottenuto che
$$u(x) = A\int_0^{r(x)} g(s)\,ds + 1,$$
da cui
$$\nabla u(x) = Ag(r(x))\,\nabla r.$$
Otteniamo quindi che su $B(o, r_{-G})\setminus\{o\}$
$$\nabla r = \frac{\nabla u}{Ag(r)}.$$

Proviamo ora che

$$Hess\,(r) = \frac{g'(r(x))}{g(r(x))}\langle \cdot\,,\,\cdot\rangle\,. \tag{3.5}$$

Per provare (3.5) ci limitiamo a considerare, in accordo a (3.4), campi vettoriali $X, Y \in (\nabla r)^{\perp}$. Si ha che

$$\begin{aligned} Hess\,(r)\,(X,Y) &= \langle D_X \nabla r, Y\rangle \\ &= \left\langle D_X \frac{\nabla u}{Ag(r(x))}, Y\right\rangle \\ &= \left\langle X\left(\frac{1}{Ag(r(x))}\right)\nabla u, Y\right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{Ag(r(x))}\langle D_X \nabla u, Y\rangle\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ma poiché $X \perp \nabla r$

$$\begin{aligned} X\left(\frac{1}{Ag(r(x))}\right) &= \left\langle \nabla\left(\frac{1}{Ag(r(x))}\right), X\right\rangle \\ &= -\frac{Ag'(r(x))}{A^2 g(r(x))^2}\langle \nabla r, X\rangle = 0. \end{aligned}$$

Quindi, sostituendo in (3.6),

$$\begin{aligned} Hess\,(r)\,(X,Y) =& 0 + \frac{1}{Ag(r(x))} Hess\,(u)\,(X,Y) \\ =& \frac{1}{Ag(r(x))} H(r(x))\,u(x)\,\langle X, Y\rangle \\ =& \frac{1}{Ag(r(x))}\frac{Ag'(r(x))}{A\int_0^{r(x)} g(s)\,ds + 1}\left(A\int_0^{r(x)} g(s)\,ds + 1\right)\langle X, Y\rangle \\ =& \frac{g'(r(x))}{g(r(x))}\langle X, Y\rangle\,. \end{aligned}$$

Abbiamo così provato la (3.5).
Ricordiamo ora la relazione

$$2Hess\,(r) = \mathcal{L}_{\partial_r}\langle \cdot\,,\,\cdot\rangle\,. \tag{3.7}$$

Considerando E_p, E_q campi vettoriali del frame ortonormale locale $\{E_i\}_{i=1}^m$, $p, q \neq 1$, per quanto calcolato, si ha

$$2Hess\,(r)\,(E_p, E_q) = 2\,\frac{g'(r)}{g(r)}\sigma_{pq}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\partial_r} \langle \cdot \,, \cdot \rangle (E_p, E_q) =& \left(\mathcal{L}_{\partial_r} (dr \otimes dr) + \sigma_{\alpha\beta} \vartheta^\alpha \otimes \vartheta^\beta \right) (E_p, E_q) \\
=& \partial_r (\sigma_{\alpha\beta}) \, \vartheta^\alpha \otimes \vartheta^\beta (E_p, E_q) + 0 \\
=& \partial_r \sigma_{pq}.
\end{aligned}$$

Dalla (3.7) e dal fatto che al primo ordine ogni metrica Riemanniana è Euclidea, otteniamo quindi il sistema

$$\begin{cases} (i) & \partial_r \sigma_{pq} (r) = 2 \frac{g'(r)}{g(r)} \sigma_{pq} (r) \\ (ii) & \sigma_{pq} (r, \vartheta) = r^2 \delta_{pq} + o \left(r^2 \right) \quad \text{per} \ \ r \to 0. \end{cases}$$

Siano $\sigma^1_{pq}, \sigma^2_{pq}$ soluzioni di questo sistema, mostriamo che esse devono coincidere. Dalla (i) si ha che, per $i = 1, 2$,

$$\frac{\partial_r \sigma^i_{pq}}{\sigma^i_{pq}} = 2 \, \frac{g'}{g},$$

da cui,

$$\partial_r \left(\log \sigma^i_{pq} \right) = 2 \partial_r \left(\log g \right).$$

Otteniamo quindi che

$$\partial_r \left(\log \left(\frac{\sigma^i_{pq}}{g^2} \right) \right) = 0,$$

per $i = 1, 2$. In particolare

$$\partial_r \left(\log \left(\frac{\sigma^1_{pq}}{g^2} \right) \right) = \partial_r \left(\log \left(\frac{\sigma^2_{pq}}{g^2} \right) \right),$$

da cui

$$\partial_r \left(\log \left(\frac{\sigma^1_{pq}}{\sigma^2_{pq}} \right) \right) = 0.$$

Quindi

$$\log \left(\frac{\sigma^1_{pq}}{\sigma^2_{pq}} \right) = \tilde{f} \left(\vartheta \right),$$

per qualche funzione $\tilde{f}$ indipendente da r. Poniamo

$$\frac{\sigma^1_{pq} (r, \vartheta)}{\sigma^2_{pq} (r, \vartheta)} = f \left(\vartheta \right).$$

Usando la (ii) otteniamo che per $r \to 0$

$$r^2 \delta_{pq} + o \left(r^2 \right) = f \left(\vartheta \right) \left(r^2 \delta_{pq} + o \left(r^2 \right) \right),$$

e quindi $f(\vartheta) \equiv 1$.
Osserviamo ora che

$$\overline{\sigma_{pq}}(r) = g(r)^2 \delta_{pq}$$

è soluzione di (i) e (ii). Infatti, poiché

$$g^2 = r^2 + o\left(r^2\right),$$

si ha che

$$\begin{aligned} \partial_r \overline{\sigma_{pq}} &= 2g'g\delta_{pq} = 2\,\frac{g'}{g} g^2 \delta_{pq} = 2\,\frac{g'}{g}\overline{\sigma_{pq}}, \\ \overline{\sigma_{pq}}(r) &= \left(r^2 + o\left(r^2\right)\right)\delta_{pq} = r^2\delta_{pq} + o\left(r^2\right). \end{aligned}$$

Per quanto osservato sopra risulta quindi

$$\sigma_{pq}(r) = \begin{cases} g(r)^2 & p = q \\ 0 & p \neq q, \end{cases}$$

e la metrica su $B(o, r_{-G}) \setminus \{o\}$ ha la forma

$$\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle = dr \otimes dr + g(r)^2\, d\vartheta^2,$$

mostrando l'isometria desiderata con il modello M^m_{-G}. $\square$

3.2 Possibili sviluppi

Confrontando il Teorema 18 con i Teoremi 11 e 12 sorge naturale la domanda di quali conclusioni si possano trarre nel caso in cui la varietà completa $(M, \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ supporti una funzione liscia $u : M \to \mathbb{R}$ che sia soluzione di (3.2) su tutta la varietà. Ci si accorge che nel caso in cui $r_{-G} = +\infty$ siamo in una situazione simile a quella del Teorema 12 e che, direttamente dal Teorema 18, l'intera varietà M è isometrica al modello M^m_{-G}. Invece, nel caso in cui $r_{-G} < +\infty$, ispirandosi alla dimostrazione del Teorema 11, siamo portati a cercare condizioni sul coefficiente $H(r)$ grazie alle quali si possa garantire che la varietà è compatta, che risulti essere la compattificazione a un punto del modello M^m_{-G} e che abbia la stessa classe di diffeomorfismo di S^m.

Nella nostra trattazione abbiamo considerato il caso di varietà senza bordo. Il seguente risultato, dovuto a R.C. Reilly, [Re], estende al caso $\partial M \neq \emptyset$ il risultato di Obata che abbiamo richiamato nel Teorema 11.

Teorema 19. *Sia* $(M, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ *una varietà Riemanniana* m*-dimensionale, compatta e con bordo. Supponiamo che esista una funzione non costante* u *che soddisfi*

$$\begin{cases} Hess\,(u) = -ku \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle & su \quad M \\ u = 0 & su \quad \partial M, \end{cases}$$

con $k > 0$*. Allora* $(M, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ *è isometrica alla semisfera di curvatura costante* k *con la metrica indotta da* $\mathbb{R}^{m+1}$*.*

I teoremi di Obata e Reilly coprono entrambi il caso di curvatura sezionale costante positiva. Una possibile estensione, in linea con quanto abbiamo dimostrato, potrebbe interessare varietà compatte con bordo che ammettono una soluzione del problema

$$\begin{cases} Hess\,(u) = H\,(r)\,u \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle & \text{su} \quad M \\ u = c & \text{su} \quad \partial M. \end{cases}$$

Si noti che la difficoltà per la formulazione di un problema di Dirichlet nel caso generale dei modelli è che l'annullarsi della soluzione su ∂M comporta che, in questi punti, il coefficiente $H\,(r)$, come caratterizzato nel Teorema 18, non sia in generale definito. Questo suggerisce di cercare ulteriori condizioni sul fattore di deformazione g del modello che comportino la ben definitezza del coefficiente H.

Infine, un possibile campo di indagine futuro potrebbe essere l'estensione di questi discorsi a varietà pseudo-Riemanniane $(M, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$. Un buon punto di partenza è il lavoro di Y. Kerbrat, [Ke]. Considerato lo spazio $A\,(M, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$Hess\,(u) = -ku \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle\,,$$

Kerbrat ha definito su di esso una forma quadratica la cui segnatura è associata all'esistenza di punti critici per la soluzione u. Partendo da questa osservazione ha dimostrato teoremi che estendono i risultati di Obata e Tashiro a varietà pseudo-Riemanniane di dimensione $m \geq 2$. Apparentemente la segnatura della forma quadratica è indipendente dal fatto che il coefficiente k sia costante. Ci si chiede se sia sensata un'estensione del Teorema di Kerbrat al caso in cui il coefficiente dipenda dalla distanza pseudo-Riemanniana intrinseca da un'origine fissata, al fine di caratterizzare i generici modelli pseudo-Riemanniani.

Bibliografia

[Bi] Richard L. Bishop, *Decomposition of cut loci.* Proc. Amer. Math. Soc., **65**, 1976, 133-136.

[BiO'N] Richard L. Bishop e Barrett O'Neill, *Manifolds of negative curvature.* Trans. Amer. Math. Soc., **145**, 1969, 1-49.

[Ch] Isaac Chavel, *Riemannian Geometry-A Modern Introduction.* New York: Cambridge University Press, 1993, 386 pp.

[Esc] José F. Escobar, *Uniqueness Theorem on Conformal Deformation of Metrics, Sobolev Inequalities, and an Eingenvalue Estimate.* Comm. Pure Appl. Math., **43**, 1990, 857-883.

[GW] Robert E. Greene e Hung-Hsi Wu, *Function Theory on Manifolds Which Possess a Pole.* Lecture Notes in Math.,n. 699, Springer Verlag, 1979, 215 pp.

[Ka] Masahiko Kanai, *On a differential equation characterizing a Riemannian structure of a manifold.* Tokyo J. Math., **6**, 1983, 143-151.

[Ke] Yvan Kerbrat, *Transformations conformes des variétés pseudo-riemannienes.* J. Differential Geometry, **11**, 1976, 547-571.

[Lee] John M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature.* Graduate Texts in Mathematics, Springer **176**, 1997, 224 pp.

[Ob] Morio Obata, *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere.* J. Math. Soc. Japan, **14**, 1962, 333-340.

[Pet1] Peter Petersen, *Riemannian Geometry.* Graduate Texts in Mathematics, Springer **171**, 1998, 432 pp.

[Pet2] Peter Petersen, *Aspects of Global Riemannian Geometry.* Bull. Amer. Math. Soc., **36**, 1999, 297-344.

[Re] Robert C. Reilly, *Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold*. Indiana Univ. Math. J., **26**, 1977, 459-472.

[Ta] Yoshihiro Tashiro *Complete Riemannian manifolds and some vector fields*. Trans. Amer. Math. Soc., **117**, 1965, 251-275.

[Wo] Franz-Erich Wolter, *Distance function and cut loci on a complete Riemannian manifold*. Arch. Math. (Basel) **32**, 1979, 92-96.